§8. 逆写像定理

写像は一般には全単射ではないため逆写像が存在するとは限らないが, Euclid 空間の間の写像の場合は Jacobian を調べることにより, 局所的に逆写像が存在することが保証される場合がある. まず, 次の例から始めよう.

例 8.1 A を n 次の実正方行列とし, $b \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への写像 f を

$$f(x) = xA + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. 線形代数において学ぶことより, f が逆写像 f^{-1} をもつための必要十分条件は A が正則行列であること, すなわち A の行列式が 0 とならないことである. また, 問 6.1 より, この条件は f の Jacobian が 0 とならないことと言い替えることができる.

逆写像定理とは大雑把に言えば, 上の例において f がアファイン変換とは限らない微分可能な写像の場合に一般化したものである. なお, 逆写像定理は逆関数定理ということもある. ここでは, 多変数の微分積分において学ぶ陰関数定理から出発して, 逆写像定理を示すことにする.

定理 8.1 (陰関数定理 I) $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ とし, (a, b) の近くで C^r 級の 2 変数実数値関数 f が

$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0$$

をみたすとする. このとき, $\varphi(a) = b$ をみたし a の近くで C^r 級の 1 変数実数値関数 φ が一意的に存在し,

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

陰関数定理 I において, φ を $f = 0$ の陰関数という.

問 8.1 陰関数定理 I において, C^1 級の $f = 0$ の陰関数 φ が存在すると仮定し, $\varphi'(x)$ を計算せよ. ($f(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分する.)

陰関数定理 I は次のように自然に一般化することができる. まず, $n, m \in \mathbf{N}$ とし, $\mathbf{R}^{n+m}$ の点を上のように (x, y) ($x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$) と表すことにしよう. また, $(a, b) \in \mathbf{R}^{n+m}$ を固定しておき, f を (a, b) の近くで C^r 級の $\mathbf{R}^m$ に値をとる $(n + m)$ 変数関数とする. 更に,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_m} & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

とも表すことにする. このとき, $f = 0$ の陰関数の存在について, 次がなりたつ.

定理 8.2 (陰関数定理 II) f が

$$f(a, b) = 0, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \neq 0$$

をみたすとする．このとき, $\varphi(a)=b$ をみたし, a の近くで C^r 級の $\mathbf{R}^m$ に値をとる n 変数関数 φ が一意的に存在し,

$$f(x,\varphi(x))=0,\quad \varphi'(x)=-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}.$$

例 8.2 A を n 行 m 列の実行列, B を m 次の実正方行列とし, $c\in\mathbf{R}^m$ とする．$\mathbf{R}^{n+m}$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f を

$$f(x,y)=xA+yB+c\quad(x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{R}^m)$$

により定めると,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=B$$

である．よって, B が正則ならば,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\neq 0$$

である．

しかし, この場合はわざわざ陰関数定理を用いなくとも, $f(x,y)=0$ は y について解くことができて, 陰関数 φ は

$$\varphi(x)=-(xA+c)B^{-1}$$

となる．よって, 問 6.1 より,

$$\varphi'(x)=-AB^{-1}$$

である．

問 8.2 $k>0$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ とし, $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ に対して

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-k^2,\quad g(x,y,z)=ax+by+cz-d,$$

$$F(x,y,z)=(f(x,y,z),g(x,y,z))$$

とおくことにより, $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への C^∞ 級写像 F を定める．

(1) $(p,q,r)\in\mathbf{R}^3$ を

$$F(p,q,r)=0,\quad cq-br\neq 0$$

をみたす点とする．$\varphi(p)=(q,r)$ をみたし, p の近くで C^∞ 級の $F=0$ の陰関数 φ が存在することを示せ．($\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}=2(cy-bz)$)

(2) $\varphi'(x)$ を求めよ．($\left(\frac{az-cx}{cy-bz},\frac{bx-ay}{cy-bz}\right)$)

問 8.3 m,n を異なる自然数とし, $(x,y,z,w)\in\mathbf{R}^4$ に対して

$$f(x,y,z,w)=x^m+y^m+z^m+w^m-1,\quad g(x,y,z,w)=x^n+y^n+z^n+w^n-1,$$

$$F(x,y,z,w)=(f(x,y,z,w),g(x,y,z,w))$$

とおくことにより, $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^2$ への C^∞ 級写像 F を定める．$(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$ を

$$F(a,b,c,d)=0,\quad c,d\neq 0,\quad c\neq d$$

をみたす点とする．このとき，$\varphi(a,b)=(c,d)$ をみたし，(a,b) の近くで C^∞ 級の $F=0$ の陰関数 φ が存在することを示せ．($\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{vmatrix} = mnz^{n-1}w^{m-1}\left\{\left(\frac{z}{w}\right)^{m-n}-1\right\}$)

では，陰関数定理 II を用いて，逆写像定理を示そう．

定理 8.3 (逆写像定理)　$a\in\mathbf{R}^n$ とし，f を a の近くで C^r 級の $\mathbf{R}^n$ に値をとる n 変数関数とする．f が

$$|(Jf)(a)|\neq 0$$

をみたすならば，$f(a)$ の近くで C^r 級の f の逆写像 f^{-1} が存在し，

$$(f^{-1})'(f(x))=f'(x)^{-1}.$$

証明　f の定義域を U とする．$b=f(a)$ とおき，$\mathbf{R}^n\times U$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる $2n$ 変数関数 F を

$$F(y,x)=f(x)-y \quad (y\in\mathbf{R}^n,\ x\in U)$$

により定める．このとき，

$$\begin{aligned} F(b,a)&=f(a)-b\\ &=0. \end{aligned}$$

また，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=Jf$$

だから，仮定より，

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(b,a)\right|\neq 0.$$

よって，陰関数定理 II より，$\varphi(b)=a$ をみたし，b の近くで C^r 級の $\mathbf{R}^n$ に値をとる n 変数関数 φ が一意的に存在し，

$$F(y,\varphi(y))=0,\quad \varphi'(y)=-\frac{\partial F}{\partial y}(y,\varphi(y))\left(\frac{\partial F}{\partial x}(y,\varphi(y))\right)^{-1}.$$

すなわち，

$$f(\varphi(y))=y,\quad \varphi'(y)=(f'(x))^{-1}.$$

したがって，φ が $f(a)$ の近くで定義された f の逆写像 f^{-1} である．□

注意 8.1　逆写像定理に現れる逆写像は一般には局所的にしか定義されない．例えば，$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像 f を

$$f(x,y)=(x+y,xy)\quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$$

により定める．f の逆写像を求めるにはまず連立方程式

$$u=x+y,\quad v=xy$$

を x,y について解けばよいが，これは t に関する 2 次方程式

$$t^2-ut+v=0 \tag{$*$}$$

の実数解を求めることと同値である. 判別式を考えると, $(*)$ が実数解をもつのは $u^2 \geq 4v$ のときで, 解は

$$(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{u \pm \sqrt{u^2-4v}}{2}, \dfrac{u \mp \sqrt{u^2-4v}}{2}\right) & (\text{複号同順}) \quad (u^2 > 4v), \\ \left(\dfrac{u}{2}, \dfrac{u}{2}\right) & (u^2 = 4v) \end{cases}$$

となり, 特に $u^2 > 4v$ のとき, $(*)$ は 2 つの実数解をもつ. しかし, f の定義域を

$$\{(x,y) | x > y\}$$

または

$$\{(x,y) | x < y\}$$

に制限すれば, (x,y) は一意的に定まる.

また, f の Jacobian は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x} & \dfrac{\partial(xy)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} & \dfrac{\partial(xy)}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ &= x - y \end{aligned}$$

で, Jacobian が 0 となる集合は

$$\{(x,y) | x = y\}$$

である.

問 8.4 $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への C^∞ 級写像 f を

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.

(1) 任意の $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ に対して, $f(a,b)$ の近くで定義された C^∞ 級の f の逆写像 f^{-1} が存在することを示せ. ($|Jf| = e^{2x}$)

(2) f^{-1} の Jacobi 行列を求めよ. ($\begin{pmatrix} e^{-x}\cos y & -e^{-x}\sin y \\ e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos y \end{pmatrix}$)

(3) f の像で定義された f の逆写像は存在しないことを示せ. (f の像は $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$)

問 8.5 $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への C^∞ 級写像 f を

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^n x_i^n\right) \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を互いに異なる実数とすると, $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の近くで定義された C^∞ 級の f の逆写像が存在することを示せ. ($|Jf| = n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$)