## §9. 実対称行列の対角化

ここでは, 次の定理について述べる.

**定理 9.1**　$A$ を実正方行列とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) $A$ は直交行列によって対角化可能.

(2) $A$ は実対称行列.

**問 9.1**　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 実対称行列の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) 定理 9.1 において, (1) $\Rightarrow$ (2) を示せ. (条件を用いて直接計算する.)

定理 9.1 において, (2) $\Rightarrow$ (1) を示すには次の 2 つの定理を用いる.

**定理 9.2**　実対称行列の固有方程式の解はすべて実数.

**定理 9.3**　$n$ 次の実正方行列 $A$ の固有方程式の解がすべて実数ならば, ある $n$ 次の直交行列 $P$ が存在し, $P^{-1}AP$ は上三角行列となる.

**問 9.2**　次の (1)〜(3) の問に答えよ.
(1) 実正方行列の固有方程式の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) 定理 9.2 を示せ. (数の範囲を複素数まで拡げて考える.)
(3) 有限次元実ベクトル空間の線形変換の固有方程式の定義を述べよ. (表現行列を用いる.)

**問 9.3**　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 上三角行列の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) 定理 9.2 および定理 9.3 を用いることにより, 定理 9.1 において (2) $\Rightarrow$ (1) がなりたつことを示せ. (上三角化された行列が対角行列となることを示す.)

以下では, 線形代数の習慣に従い, $\mathbf{R}^n$ は $n$ 個の実数を縦に並べたもの全体の集合とする. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. このとき, 実対称行列を対角化する直交行列は次の (1)〜(3) の手順で求めればよい.

(1) 固有方程式を解き, 固有値を求める.

(2) 各固有値に対する固有空間の正規直交基底を選ぶ.

(3) 正規直交基底を列ベクトルとして並べる.

もちろん, 上の手順では $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えている. また, 実対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することも用いている.

**問 9.4**　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 実正方行列の固有値および固有空間の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) $x, y$ をそれぞれ実対称行列 $A$ の異なる固有値 $\lambda, \mu$ に対する固有ベクトルとする. このとき, $x$ と $y$ は直交することを示せ. ($\langle x, y\rangle = 0$ を示す.)

**例 9.1**　2 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を直交行列によって対角化してみよう．

　まず, $A$ の固有多項式を $\phi_A(t)$ とすると,

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - (-1)(-1) \\ &= t^2 - 2t. \end{aligned}$$

よって, $A$ の固有値は 0 と 2 である．

　次に, 固有値 0 に対する $A$ の固有ベクトルを求める．連立 1 次方程式

$$-A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_1 - x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 に対する $A$ の固有ベクトルである．

　更に, 固有値 2 に対する $A$ の固有ベクトルを求める．連立 1 次方程式

$$(2E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$x_1 - x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する $A$ の固有ベクトルである．

　上で得られたベクトルを正規化, すなわち長さが 1 となるようにスカラー倍して並べたものを $P$ とおくと,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, $P$ は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**問 9.5**　2 次の実対称行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

により定める．次の (1)〜(4) の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値は 2 と 7 であることを示せ．($A$ の固有方程式を直接解く．)

(2) $A$ の固有値 2 に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ. (例えば, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$)

(3) $A$ の固有値 7 に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ. (例えば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

(4) $A$ を対角化する直交行列を 1 つ求めよ. ((2), (3) で得られたベクトルを正規化する.)

**問 9.6**　3 次の実対称行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

により定める. 次の (1)〜(3) の問に答えよ.
(1) $A$ の固有値は 1 と 4 であることを示せ. ($A$ の固有方程式を直接解く.)

(2) $A$ の固有値 1 に対する固有空間を求めよ. ($\{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$)

(3) $A$ の固有値 4 に対する固有空間を求めよ. ($\{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | c \in \mathbf{R}\}$)

一般に, 固有空間の正規直交基底を選ぶには Gram-Schmidt の直交化法を用いる.

**問 9.7**　Gram-Schmidt の直交化法のステートメントを述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

**例 9.2**　問 9.6 の実対称行列 $A$ を直交行列によって対角化してみよう.
まず, 問 9.6 の (1) より, $A$ の固有値は 1 と 4 で, 問 9.6 の (2), (3) より,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき, 各固有値に対する固有空間を $W(1), W(4)$ とすると,

$$W(1) = \{c_1 u_1 + c_2 u_2 | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}, \quad W(4) = \{c u_3 | c \in \mathbf{R}\}$$

である.
次に, Gram-Schmidt の直交化法を用いて, $W(1)$ の基底 $\{u_1, u_2\}$ から正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ を求めると,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから,

$$v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$$

とおくと,

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり,

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

更に, 固有値 $4$ に対する $A$ の固有ベクトル $u_3$ を正規化したものを $v_3$ とおくと,

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと, $P$ は直交行列で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**問 9.8**　3 次の実対称行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

により定める. 次の (1)〜(4) の問に答えよ.

(1) $A$ の固有値は $0$ と $14$ であることを示せ. ($A$ の固有方程式を直接解く.)

(2) $A$ の固有値 $0$ に対する固有空間を求めよ. ($\{c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$)

(3) $A$ の固有値 $14$ に対する固有空間を求めよ. ($\{c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} | c \in \mathbf{R}\}$)

(4) $A$ を対角化する直交行列を 1 つ求めよ. (Gram-Schmidt の直交化法を用いる.)