§1. 複素数

ここでは, 複素数に関する基本的事項を改めて述べておこう．複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は虚数単位 i を用いて,

$$\{a + ib \mid a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$$

によりあたえられる．$z = a + ib \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ に対して

$$a = \mathrm{Re}\, z, \quad b = \mathrm{Im}\, z$$

と表し, これらをそれぞれ z の実部, 虚部という．2 つの複素数 $z, w \in \mathbf{C}$ の実部, 虚部がそれぞれ等しいとき, すなわち

$$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w, \quad \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$$

がなりたつとき, $z = w$ と表し, z と w は等しいという．

$\mathbf{C}$ には自然に四則演算が定まる．例えば, 和や積については $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

である．このとき, 次がなりたつ．

定理 1.1　次の (1)〜(5) がなりたつ．

(1) $\mathbf{C}$ は和に関して Abel 群となる．すなわち, $\mathbf{C}$ は和に関して群となり, 和は可換, すなわち, 任意の $z, w \in \mathbf{C}$ に対して,

$$z + w = w + z$$

である．

(2) $\mathbf{C}$ は積に関して結合律をみたす．すなわち, 任意の $z, w, v \in \mathbf{C}$ に対して,

$$(zw)v = z(wv).$$

(3) $\mathbf{C}$ は和と積に関して分配律をみたす．すなわち, 任意の $z, w, v \in \mathbf{C}$ に対して,

$$z(w + v) = zw + zv, \quad (z + w)v = zv + wv.$$

(4) $\mathbf{C}$ の加法に関する単位元を $0_{\mathbf{C}}$ と表すことにする．このとき, $0_{\mathbf{C}}$ とは異なる乗法に関する単位元 $1_{\mathbf{C}}$, すなわち, 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して

$$z1_{\mathbf{C}} = 1_{\mathbf{C}}z = z$$

をみたす $1_{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する．

(5) $\mathbf{C}$ の積は可換, すなわち, 任意の $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$zw = wz$$

である．

一般の集合に対しても, 定理 1.1 (1)〜(4) のような性質をもつ和や積を演算として考えると, 環というものを定義することができる．定理 1.1 (5) は $\mathbf{R}$ における和や積の可換性と $\mathbf{C}$ における積の定義より, ほとんど明らかである．定理 1.1 (5) のような性質をみたす環を可換環という．

問 1.1　次の問に答えよ．

(1) 定理 1.1 (1) を示せ. (群の定義および和の可換性を確認する.)
(2) 定理 1.1 (2) を示せ. (直接計算する.)
(3) 定理 1.1 (3) を示せ. (直接計算する.)
(4) 定理 1.1 (4) において, $1_{\mathbf{C}}$ を具体的に求めよ. ($1_{\mathbf{C}} = 1 + i0$)

定理 1.1 (1) より, $\mathbf{C}$ は和に関して Abel 群となるから, $z \in \mathbf{C}$ に対して, 加法に関する逆元 $-z$, すなわち,

$$z + (-z) = (-z) + z = 0_{\mathbf{C}}$$

をみたす $-z \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する. よって, $z, w \in \mathbf{C}$ に対して, 差 $z - w \in \mathbf{C}$ は

$$z - w = z + (-w)$$

により定めることができる.

更に, $\mathbf{C}$ における商について考えよう. まず, 次がなりたつ.

定理 1.2 $z \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$ に対して, 乗法に関する逆元 z^{-1}, すなわち

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1_{\mathbf{C}}$$

をみたす $z^{-1} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する.

定理 1.2 のような性質をもつ環を斜体という. 特に, 可換環であるような斜体を可換体または単に体という.

問 1.2 $z = a + ib \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) に対して, z^{-1} を具体的に求めよ. ($z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$)

$z, w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0_{\mathbf{C}}$ とすると, 問 1.2 より w^{-1} が定義され, 更に, 定理 1.1 の (5) より,

$$zw^{-1} = w^{-1}z$$

である. よって, 商 $\dfrac{z}{w} \in \mathbf{C}$ は

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

により定めることができる.

さて, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{C}$ への写像 ι を

$$\iota(a) = a + i0 \quad (a \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 次の定理より, $\mathbf{R}$ は四則演算も込めて $\mathbf{C}$ の部分集合とみなすことができる.

定理 1.3 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b), \quad \iota(ab) = \iota(a)\iota(b).$$

更に,

$$\iota(1) = 1_{\mathbf{C}}.$$

問 1.3 定理 1.3 を示せ. (ι の定義を用いて計算する.)

定理 1.3 より, $\mathbf{R}$ を $\mathbf{C}$ の部分集合とみなし, $a \in \mathbf{R}$ に対して, $a + i0$ を単に a とも表す. 特に,

$$0_{\mathbf{C}} = 0, \quad 1_{\mathbf{C}} = 1$$

である. また, $b \in \mathbf{R}$ に対して, $0 + ib$ を単に ib とも表す.

$z = a + ib \in \mathbf{C}$ に対して, $\bar{z} \in \mathbf{C}$ を

$$\bar{z} = a - ib$$

により定める. $\bar{z}$ を z の共役複素数という. 共役複素数に関して次がなりたつ.

定理 1.4 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)〜(5) がなりたつ.
(1) $\bar{\bar{z}} = z$.
(2) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
(3) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$. (複号同順)
(4) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
(5) $w \neq 0$ のとき, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

問 1.4 次の問に答えよ.
(1) 定理 1.4 (1) を示せ. ($z = a + ib$ とおいて計算する.)
(2) 定理 1.4 (2) を示せ. ($z = a + ib$ とおいて計算する.)
(3) 定理 1.4 (3) を示せ. ($z = a + ib$ とおいて計算する.)
(4) 定理 1.4 (4) を示せ. ($z = a + ib$ とおいて計算する.)
(5) 定理 1.4 (5) を示せ. ($z = a + ib$ とおいて計算する.)

$z = a + ib \in \mathbf{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 + b^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であることに注意すると, 0 以上の実数 $|z|$ を

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

により定めることができる. 特に, $|z| = 0$ となるのは $z = 0$ のときに限る. $|z|$ を z の絶対値という. 絶対値に関して次がなりたつ.

定理 1.5 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $|zw| = |z||w|$.
(2) $w \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

問 1.5 次の問に答えよ.
(1) 定理 1.5 (1) を示せ. ($z = a + ib$, $w = c + id$ とおいて計算する.)
(2) 定理 1.5 (2) を示せ. (絶対値の定義と定理 1.4 (5) を用いる.)

更に, 次がなりたつ.

定理 1.6 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\bar{w}$.
(2) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. (中線定理)
(3) $|z + w| \leq |z| + |w|$. (三角不等式)

問 1.6 次の問に答えよ.

(1) 定理 1.6 (1) を示せ. (絶対値の定義を用いて計算する.)
(2) 定理 1.6 (2) を示せ. ((1) を用いる.)
(3) 定理 1.6 (3) を示せ. (複素数の実部を絶対値で評価し (1) を用いる.)

問 1.7　2 次の実行列全体からなる集合の部分集合 X を

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

により定め, 写像

$$\varphi : \mathbf{C} \to X$$

を

$$\varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) 等式

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w), \quad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w) \ (z, w \in \mathbf{C})$$

がなりたつことを示せ. 更に, φ は全単射で, $\varphi(1)$ は単位行列であるから, X は四則演算も込めて $\mathbf{C}$ と同一視できる. (φ の定義を用いて計算する.)
(2) 等式

$$\varphi(\bar{z}) = {}^t(\varphi(z)) \quad (z \in \mathbf{C})$$

がなりたつことを示せ. (φ や共役複素数の定義を用いて計算する.)
(3) 等式

$$|z| = \sqrt{\det \varphi(z)} \quad (z \in \mathbf{C})$$

がなりたつことを示せ. (φ や絶対値の定義を用いて計算する.)

対応

$$\mathbf{C} \ni a + ib \mapsto (a, b) \in \mathbf{R}^2 \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

を考えると, $\mathbf{C}$ は xy 平面 $\mathbf{R}^2$ とみなすことができる. このとき, $\mathbf{C}$ を複素数平面, x 軸を実軸, y 軸を虚軸という.

上のように $\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}^2$ とみなすと, $z = a + ib \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ に対して, $|z|$ は $\mathbf{R}^2$ の点 (a, b) のノルム $\|(a, b)\|$ に一致する. よって,

$$d(z, w) = |z - w| \quad (z, w \in \mathbf{C})$$

とおくと, d は $\mathbf{R}^2$ 上の Euclid 距離とみなすことができる. 特に, $\mathbf{C}$ における点列の収束や開集合や閉集合といった位相的概念は $\mathbf{R}^2$ におけるものとまったく同じになる.

O を原点とし, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して z の表す点を P とすると, $|z|$ は線分 OP の長さでもある. よって, $r = \mathrm{OP}$ とおき, 実軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とすると,

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

と表すことができる. このような表し方を z の極形式という. また, $\theta = \arg z$ と表し, これを z の偏角という. θ は 2π の整数倍の差を除いて一意的に定まる.