§10. Jordan 分解

有限次元ベクトル空間の線形変換は基底を選んでおくことにより, 表現行列として表されるのであった. 表現行列が対角行列となるように基底を選ぶことのできる線形変換は半単純であるという. また, 線形変換は自分自身との何回かの合成が零写像となるとき, 巾零であるという. ここでは, 線形変換が半単純部分と巾零部分の和に分解できることについて述べよう.

問 10.1　有限次元ベクトル空間の巾零な線形変換に対する表現行列は巾零であることを示せ. (表現行列を何乗かすると零行列となることを示す.)

V をベクトル空間, $W_1, W_2, \ldots, W_m$ を V の部分空間とし, V の部分集合 $W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ を

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_m | x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2,\ \ldots,\ x_m \in W_m\}$$

により定める. このとき, 次がなりたつ.

定理 10.1　$W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ は V の部分空間.

問 10.2　定理 10.1 を示せ. (部分空間となるための 3 つの条件を調べる.)

$W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ を $W_1, W_2, \ldots, W_m$ の和空間という. 以下では, ベクトル空間は有限次元であるとする. このとき, $W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ の次元について, 次がなりたつ.

定理 10.2　$m \geq 2$ のとき,

$$\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_m) = \sum_{j=1}^{m} \dim W_j - \sum_{j=1}^{m-1} \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1}).$$

定理 10.2 は m に関する数学的帰納法により示すことができる. また, $m = 2$ の場合は定理 10.2 を部分空間に対する次元定理ともいう.

更に, 次がなりたつことが分かる.

定理 10.3　次の (1)〜(3) は同値.

(1) 任意の $x \in W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ は

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \quad (x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_m \in W_m)$$

と一意的に表される.

(2) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_m) = \sum_{j=1}^{m} \dim W_j$.

(3) $(W_1 + W_2 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1} = \{0\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$.

定理 10.3 の条件がなりたつとき,

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$$

と表し, これを直和分解という. 直和分解は射影という線形写像と深い関わりがある.

定義 10.1　V をベクトル空間, p を V の線形変換とする. p は

$$p \circ p = p$$

をみたすとき, 射影という.

問 10.3 V をベクトル空間, p を V の線形変換とする. p が射影ならば, p の像への制限

$$p|_{\mathrm{Im}\,p} : \mathrm{Im}\,p \to V$$

は $\mathrm{Im}\,p$ の恒等変換 $1_{\mathrm{Im}\,p}$ を定めることを示せ. (定義を用いる.)

直和分解は次のように射影と対応する

定理 10.4 V をベクトル空間,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \tag{$*$}$$

を V の直和分解とする. このとき, 次の (1)〜(3) をみたす射影 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ が一意的に存在する.

(1) $p_j \circ p_k = \delta_{jk} p_j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, r)$.
(2) 任意の $x \in V$ に対して, $p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_r(x) = x$.
(3) $V_j = \mathrm{Im}\,p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

ただし, δ_{jk} は Kronecker の δ である. 逆に, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ が (1), (2) をみたす射影ならば, V の部分空間 $V_1, V_2, \ldots, V_r$ を (3) により定めると, 直和分解 $(*)$ が得られる.

問 10.4 定理 10.4 について, $r = 2$ のときを考える.
(1) p_1, p_2 の存在を示せ. ($x \in V$ を $x = x_1 + x_2$ と分解し, $p_j(x) = x_j$ $(j = 1, 2)$ とおく.)
(2) p_1, p_2 の一意性を示せ. (別に q_1, q_2 が存在すると仮定し, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ を示す.)

注意 10.1 簡単のため, V, W を $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする. V から W への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(V, W)$ と表すと, $\mathrm{Hom}(V, W)$ はベクトル空間となる. 実際, $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $c \in \mathbf{C}$ に対して, $f + g, cf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ をそれぞれ

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x) \quad (x \in V)$$

により定めればよい. また, V の線形変換全体の集合, すなわち $\mathrm{Hom}(V, V)$ は $\mathrm{End}(V)$ とも表す. このとき, 定理 10.4 の (2) は

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1_V$$

と表すことができる. ただし, 1_V は V の恒等変換である.

線形変換を用いてベクトル空間を直和分解することを考えよう. 以下では, ベクトル空間は $\mathbf{C}$ 上のものを考えることにする.

V をベクトル空間, f を V の線形変換とする. k 個の f から得られる合成写像を f^k と表すことにする. 例えば,

$$f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f$$

である. また,

$$f^0 = 1_V, \quad f^1 = f$$

と約束する.

λ を f の固有値とし, V の部分集合 $\widetilde{W}(\lambda)$ を

$$\widetilde{W}(\lambda) = \{x \in V \mid \text{ある自然数 } k \text{ に対して } (\lambda 1_V - f)^k(x) = 0\}$$

により定める. このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理 10.5 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\widetilde{W}(\lambda)$ は V の部分空間.
(2) $\widetilde{W}(\lambda)$ の次元は固有値 λ の重複度に一致する.

問 10.5　定理 10.5 の (1) を示せ. (部分空間となるための 3 つの条件を調べる.)

$\widetilde{W}(\lambda)$ を固有値 λ に対する f の広義固有空間または一般固有空間という. k を自然数とすると,

$$\mathrm{Im}\,(\lambda 1_V - f)^k \subset \mathrm{Im}\,(\lambda 1_V - f)^{k-1}$$

がなりたつが, V は有限次元としているから, ある k に対して等式

$$\mathrm{Im}\,(\lambda 1_V - f)^k = \mathrm{Im}\,(\lambda 1_V - f)^{k+1}$$

がなりたつ. このような k の中で最小のものを固有値 λ の標数という. k を λ の標数とすると, 一般固有空間は

$$\widetilde{W}(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(\lambda 1_V - f)^k$$

と表すことができる.

線形変換があたえられると, ベクトル空間はその一般固有空間を用いて直和分解されることが分かる.

定理 10.6　V をベクトル空間, f を V の線形変換, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を f のすべての互いに異なる固有値とする. このとき,

$$V = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \widetilde{W}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r). \qquad (**)$$

注意 10.2　定理 10.6 において, 直和分解 $(**)$ に対応する射影 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ は f の固有多項式を用いて, 具体的に計算することができる.

$\phi_f(t)$ を f の固有多項式とし,

$$\phi_f(t) = \prod_{j=1}^{r} (t - \lambda_j)^{m_j}$$

と表しておく. ただし, m_j は固有値 λ_j の重複度である. このとき, $\dfrac{1}{\phi_f(t)}$ を部分分数分解し,

$$\frac{1}{\phi_f(t)} = \frac{g_1(t)}{(t-\lambda_1)^{m_1}} + \frac{g_2(t)}{(t-\lambda_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{g_r(t)}{(t-\lambda_r)^{m_r}}$$

と表しておく. ただし, $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_r(t)$ は t の多項式である. 両辺に $\phi_f(t)$ を掛けると,

$$1 = g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t) + \cdots + g_r(t)h_r(t)$$

となる. ただし,

$$h_j(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} (t - \lambda_k)^{m_k}$$

である. よって, t に f を代入すると,

$$1_V = g_1(f)h_1(f) + g_2(f)h_2(f) + \cdots + g_r(f)h_r(f)$$

となるから, 任意の $x \in V$ に対して,

$$x = (g_1(f)h_1(f))(x) + (g_2(f)h_2(f))(x) + \cdots + (g_r(f)h_r(f))(x).$$

ここで, Cayley-Hamilton の定理より, $\phi_f(f)$ は零写像だから, $j = 1, 2, \ldots, r$ とすると,

$$\begin{aligned}(\lambda_j 1_V - f)^{m_j}((g_j(f)h_j(f))(x)) &= (g_j(f)\phi_f(f))(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって,

$$(g_j(f)h_j(f))(x) \in \widetilde{W}(\lambda_j)$$

となるから,

$$p_j = g_j(f)h_j(f)$$

である.

なお, 上の計算では $\phi_f(f)$ が零写像となることを用いたが, $\phi_f(t)$ の代わりに $\phi(f)$ が零写像となるような 0 ではない多項式 $\phi(t)$, 例えば f の最小多項式を用いてもよい.

問 10.6 線形変換の最小多項式の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ を直和分解 $(**)$ に対応する射影とし, 線形変換 f_s, f_n を

$$f_s = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_r p_r, \quad f_n = f - f_s$$

により定める.

定理 10.7 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) f_s と f_n は可換.
(2) f_s は半単純.
(3) f_n は巾零.

証明 (1), (2) のみ示す.
(1): 注意 10.2 より, f_s, f_n は f の多項式で表される. よって, f_s と f_n は可換である.
(2): まず, 定理 10.4 より,

$$V = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, p_r.$$

次に, $j = 1, 2, \ldots, r$ とすると,

$$\begin{aligned}f_s \circ p_j &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_r p_r) \circ p_j \\ &= \lambda_j p_j\end{aligned}$$

だから, f_s の $\mathrm{Im}\, p_j$ への制限は λ_j 倍する写像である. よって, $\mathrm{Im}\, p_j$ は固有値 λ_j に対する固有空間となるから, f_s は半単純となる. □

注意 10.3 定理 10.7 の (2) とは逆に, 固有空間を用いて直和分解を考えることにより, 半単純な線形変換は定理 10.4 の (1), (2) の条件をみたす射影の 1 次結合として表すことができる. この 1 次結合をスペクトル分解という.

問 10.7 定理 10.7 の (3) を示せ. (k を各固有値の標数の中で最大のものとし, f_n^k を考える.)

定理 10.7 より, f は

$$f = f_s + f_n$$

と半単純部分と巾零部分の和に分解することができた. これを一般スペクトル分解または Jordan 分解という. 更に, Jordan 分解は一意的である.

問 10.8 Jordan 分解の一意性を示せ. (巾零な線形変換の固有値は 0 のみである.)