§11. レゾルベント

ベクトル空間の線形変換はレゾルベントというものを用いて調べることもできる．ここでは，簡単のため，正方行列のレゾルベントを考えよう．

複素数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{C})$ と表すことにする．$A \in M_n(\mathbf{C})$ とし，$\lambda \in \mathbf{C}$ が A の固有値ではないとすると，同次形の連立１次方程式

$$Ax = \lambda x$$

は自明な解しかもたない．よって，E を n 次の単位行列とすると，$\lambda E - A$ は正則となる．このことに注意し，次のように定義する．

定義 11.1　$A \in M_n(\mathbf{C})$ とする．A の固有値全体の集合を $\sigma(A)$ と表し，A のスペクトルという．また，集合 $\mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ を $\rho(A)$ と表し，A の解素集合またはレゾルベント集合という．このとき，$\rho(A)$ で定義された $M_n(\mathbf{C})$ に値をとる関数 R を

$$R(z) = (zE - A)^{-1} \quad (z \in \rho(A))$$

により定め，これを A の解素またはレゾルベントという．

問 11.1　A を次の (1), (2) の正方行列とする．$R(z)$ を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{z-\lambda_1} & & & \text{\huge 0} \\ & \frac{1}{z-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \frac{1}{z-\lambda_n} \end{pmatrix} \right)$

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{z-\lambda} & \frac{1}{(z-\lambda)^2} & \frac{1}{(z-\lambda)^3} \\ 0 & \frac{1}{z-\lambda} & \frac{1}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-\lambda} \end{pmatrix} \right)$

問 11.2　$A \in M_n(\mathbf{C})$, $z, w \in \rho(A)$ とする．このとき，

$$R(z) - R(w) = (w - z)R(z)R(w)$$

がなりたつことを示せ．なお，この式をレゾルベント方程式という．(右辺を上手く変形する.)

レゾルベントについて詳しく調べる前に，§10 において一般の線形変換の場合に述べたことを正方行列の場合に言い替えておこう．

$A \in M_n(\mathbf{C})$ とし，λ を A の固有値とすると，固有値 λ に対する A の一般固有空間 $\widetilde{W}(\lambda)$ は

$$\widetilde{W}(\lambda) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \text{ある自然数 } k \text{ に対して}, (\lambda E - A)^k x = 0\}$$

により定められる．また，固有値 λ の標数とは

$$\mathrm{Im}\,(\lambda E - A)^k = \mathrm{Im}\,(\lambda E - A)^{k+1}$$

をみたす k の中で最小のものである．k を λ の標数とすると，一般固有空間は

$$\widetilde{W}(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(\lambda E - A)^k \qquad (*)$$

と表すことができる．このとき，次がなりたつ．

定理 11.1 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A のすべての互いに異なる固有値とする. このとき, 直和分解

$$\mathbf{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \widetilde{W}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r)$$

がなりたつ. また, 次の (1)〜(3) をみたす射影 $P_1, P_2, \ldots, P_r \in M_n(\mathbf{C})$ が一意的に存在する.

(1) $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, r)$.
(2) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = E$.
(3) $\widetilde{W}(\lambda_j) = \mathrm{Im}\, P_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

更に,

$$S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r, \quad N = A - S$$

とおくと, S と N は可換で, S は対角化可能, N は巾零となり, A の Jordan 分解は

$$A = S + N$$

と表される.

問 11.3 正方行列を対角化可能な行列 S と巾零行列 N の和で表す分解は S と N が可換とはは限らないならば一意的ではないことを具体的な例を挙げることにより示せ. (例えば, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$)

$j = 1, 2, \ldots, r$ とし, k_j を固有値 λ_j の標数とする. $P_1, P_2, \ldots, P_r$ を定理 11.1 により定められる射影とし, $N_i \in M_n(\mathbf{C})$ を

$$N_j = (A - \lambda_j E) P_j$$

により定める. このとき, $R(z)$ は次のように表すことができる.

定理 11.2 $R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{1}{z - \lambda_j} P_j + \sum_{m=1}^{k_j - 1} \frac{1}{(z - \lambda_j)^{m+1}} N_j^m \right\}$

証明 $j = 1, 2, \ldots, r$ とすると, 定理 11.1 の (2) より,

$$\begin{aligned} (zE - A) P_j &= \left(\sum_{m=1}^{r} (zE - A) P_m \right) P_j \\ &= (zE - A) P_j \\ &= (z - \lambda_j) \left(E - \frac{A - \lambda_j E}{z - \lambda_j} \right) P_j. \end{aligned}$$

ここで, 注意 10.2 より, P_j は A の多項式だから, A と可換である. また, $(*)$ および定理 11.1 の (3) より,

$$\widetilde{W}(\lambda_j) = \mathrm{Ker}\, (\lambda_j E - A)^{k_j} = \mathrm{Im}\, P_j$$

だから,

$$(A - \lambda_j E)^{k_j} P_j = O.$$

よって,

$$Q_j = \frac{1}{z - \lambda_j} \left\{ E + \frac{A - \lambda_j E}{z - \lambda_j} + \left(\frac{A - \lambda_j E}{z - \lambda_j} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{A - \lambda_j E}{z - \lambda_j} \right)^{k_j - 1} \right\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(zE-A)P_jQ_j &= (z-\lambda_j)\left(E-\frac{A-\lambda_jE}{z-\lambda_j}\right)P_jQ_j\\ &= (z-\lambda_j)\left(E-\frac{A-\lambda_jE}{z-\lambda_j}\right)Q_jP_j\\ &= \left\{E-\left(\frac{A-\lambda_jE}{z-\lambda_j}\right)^{k_j}\right\}P_j\\ &= P_j.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}(zE-A)\sum_{j=1}^{r}Q_jP_j &= \sum_{j=1}^{r}(zE-A)P_jQ_j\\ &= \sum_{j=1}^{r}P_j\\ &= E.\end{aligned}$$

すなわち, $R(z)$ は上のように表される. □

問 11.4 A を Hermite 行列とする.
(1) A の固有値は実数であることを示せ. (標準 Hermite 内積を用いて計算する.)
(2) 定理 11.2 を用いることにより, A の固有値の標数は 1 であることを示せ. 特に, A は対角化可能であることが分かる. ($R(z)$ の 2 乗や微分を計算する.)

問 11.5 $A \in M_n(\mathbf{C})$, $z \in \mathbf{C}$ とすると, $|z|$ が十分大きいとき, $R(z)$ は

$$R(z)=\frac{E}{z}+\frac{A}{z^2}+\frac{A^2}{z^3}+\cdots+\frac{A^m}{z^{m+1}}+\cdots$$

と展開されることが分かる. このことを用いて, Cayley-Hamilton の定理を示せ. なお, 上のような展開を Laurent 展開という. ($\phi_A(z)R(z)$ を計算し, $\frac{1}{z}$ の係数に注目する.)

§2 において扱った正則関数は $\mathbf{C}$ の開集合で定義された複素数値関数に対して定義されたが, 行列値関数に対しても, 成分毎に考えることにより, 正則性や複素線積分を考えることができる. 更に, 行列に値をとる正則関数に対する複素線積分についても, §8 や §9 で述べたような Cauchy の積分定理や Cauchy の積分公式がなりたつ.

上の射影 P_i は $R(z)$ の複素線積分を用いて, 次のように表すことができる.

定理 11.3 D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域とする. ∂D が A の固有値を含まないならば,

$$\sum_{\lambda_j\in D}P_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}R(z)dz.$$

特に, D が A のすべての固有値を含むならば,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}R(z)dz=E.$$

証明　問 8.2 および例 8.2 と同様に考えればよい. □

問 11.6　$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\sigma(A)$ および $R(z)$ を求めよ. ($\sigma(A) = \{-1, 3\}$, $R(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)} \begin{pmatrix} z-1 & 4 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix}$)

(2) $R(z)$ の複素線積分を計算することにより, A による $\mathbf{C}^n$ の直和分解に対応する射影を求めよ.
($\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$)

(3) A の Jordan 分解を求めよ. ($S = A$, $N = O$)

問 11.7　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\sigma(A)$ および $R(z)$ を求めよ. ($\sigma(A) = \{2\}$, $R(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \begin{pmatrix} z-3 & 1 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix}$)

(2) $R(z)$ の複素線積分を計算することにより, A による $\mathbf{C}^n$ の直和分解に対応する射影を求めよ.
(E)

(3) A の Jordan 分解を求めよ. ($S = 2E$, $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$)

問 11.8　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\sigma(A)$ および $R(z)$ を求めよ. ($\sigma(A) = \{1, 2\}$, $R(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)(z-2)} & \frac{2z-3}{(z-1)^2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-1} \end{pmatrix}$)

(2) $R(z)$ の複素線積分を計算することにより, A による $\mathbf{C}^n$ の直和分解に対応する射影を求めよ.
($\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(3) A の Jordan 分解を求めよ. ($S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

問 11.9　$A \in M_n(\mathbf{R})$ とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A のすべての互いに異なる固有値とする. また, $j = 1, 2, \ldots, r$ に対して, D_j を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域で, D_j は λ_j のみを A の固有値として含み, ∂D_j は A の固有値を含まないものとする. このとき,

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_j} R(z) dz$$

とおく. $R(z)$ の Laurent 展開を用いることにより, 次の (1), (2) を示せ.
(1) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = E$. (直接計算する.)
(2) $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, r)$. (更にレゾルベント方程式を用いる.)