§12. 行列の正則関数

多項式に対しては変数に正方行列を代入することにより, 行列多項式という新たな正方行列を定義することができるが, 正則関数の変数に正方行列を代入するようなことは可能であろうか. §4 において扱ったように, 指数関数に対しては行列の指数関数を定義することができるが, 一般の正則関数に対しては収束の問題があるため, 単純に変数に正方行列を代入することはできないことが分かる. しかし, §9 において扱った Cauchy の積分公式を用いることにより, 行列の正則関数というものを定義することが可能となる.

$A \in M_n(\mathbf{C})$ とし, D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域で, $\sigma(A) \subset D$, すなわち A のすべての固有値を含むものとする. 更に, f を $D \cup \partial D$ を含む領域で正則な複素関数とする. このとき, $f(A) \in M_n(\mathbf{C})$ を

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)R(z)dz$$

により定める. ただし, $R(z)$ は A のレゾルベントである. Cauchy の積分定理より, D が上の条件をみたす限り, $f(A)$ は D の選び方に依存しないことが分かる.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A のすべての互いに異なる固有値とする. また, $j = 1, 2, \ldots, r$ とし, k_j を固有値 λ_j の標数とする. 更に, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ を A による $\mathbf{C}^n$ の直和分解に対応する射影とする. このとき, 次がなりたつ.

定理 12.1　$f(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{k_j-1}\frac{f^{(m)}(\lambda_j)}{m!}(A-\lambda_j E)^m P_j.$

証明　$D_1, D_2, \ldots, D_r$ を D に含まれる互いに交わらない $\mathbf{C}$ の有界な領域で, $j = 1, 2, \ldots, r$ に対して, ∂D_j は λ_j を中心とする円となるものとする. このとき, Cauchy の積分定理および定理 11.2 より,

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_j} f(z)R(z)dz \\ &= \sum_{l=1}^{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_l} f(z)\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=0}^{k_j-1}\frac{1}{(z-\lambda_j)^{m+1}}(A-\lambda_j E)^m P_j dz. \end{aligned}$$

ここで, $\lambda_j \in D_j$ であることに注意すると, Cauchy の積分定理および定理 9.3 より,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_l}\frac{f(z)}{(z-\lambda_j)^{m+1}}dz = \begin{cases} \dfrac{f^{(m)}(\lambda_j)}{m!} & (l = j), \\ 0 & (l \neq j). \end{cases}$$

よって, $f(A)$ は上のように表される. □

定理 12.1 より, 直ちに次がなりたつ.

定理 12.2　多項式 $g(t)$ が $j = 1, 2, \ldots, r$ および $m = 0, 1, 2, \ldots, k_j - 1$ に対して,

$$g^{(m)}(\lambda_j) = f^{(m)}(\lambda_j)$$

をみたすならば,

$$f(A) = g(A).$$

例 12.1 (Sylvester の公式)　$A \in M_n(\mathbf{C})$ が対角化可能であるとし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A の互いに異なる固有値とする. このとき, 注意 10.3 より, 各固有値の標数はすべて 1 である. また, f を $\sigma(A)$ を含む $\mathbf{C}$ の領域で正則な複素関数とする. ここで, 多項式 $g(t)$ を

$$g(t) = \sum_{l=1}^{r} f(\lambda_l) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^{r} \frac{(t-\lambda_p)}{(\lambda_l - \lambda_p)}$$

により定めると,

$$g(\lambda_j) = f(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

よって, 定理 12.2 より,

$$f(A) = g(A).$$

問 12.1　l を 0 以上の整数とし,

$$f(z) = z^l \quad (z \in \mathbf{C})$$

とおく.
(1) 定理 12.1 の右辺を計算することにより, $f(A)$ を求めよ. (A^l)
(2) $R(z)$ の Laurent 展開を用いることにより, $f(A)$ を求めよ. (問 11.5 を思い出す.)

問 12.2　A を正則行列とし,

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$$

とおく. 定理 12.1 の右辺を計算することにより, $f(A)$ を求めよ. (A^{-1})

問 12.3　$A \in M_n(\mathbf{C})$ とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A のすべての互いに異なる固有値とする. また, $j = 1, 2, \ldots, r$ とし, k_j を固有値 λ_j の標数とする. 更に, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ を A による $\mathbf{C}^n$ の直和分解に対応する射影とする.
(1) Jordan 分解を用いることにより, $\exp A$ を A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, $k_1, k_2, \ldots, k_r$, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ を用いて表せ. ($\sum_{j=0}^{r} e^{\lambda_j} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{1}{m!}(A - \lambda_j E)^m P_j$)
(2) 定理 12.1 において,

$$f(z) = e^z \quad (z \in \mathbf{C})$$

のとき, 右辺を計算することにより, $f(A)$ を求めよ. ($\exp A$)

問 12.4　$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ とおき, f を λ を含む $\mathbf{C}$ の領域で正則な複素関数とする. $f(A)$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$)

行列の正則関数は次のように表すこともできる.

定理 12.3　$A \in M_n(\mathbf{C})$ の Jordan 分解を

$$A = S + N$$

とし, f を $\sigma(A)$ を含む $\mathbf{C}$ の領域で正則な複素関数とする. このとき,

$$f(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(S)}{m!} N^m.$$

証明　S のスペクトル分解を

$$S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r$$

と表しておく. $f^{(m)}$ は $\sigma(A)$ を含む $\mathbf{C}$ の領域で正則となるから, 定理 12.1 より,

$$f^{(m)}(S) = \sum_{j=1}^{r} f^{(m)}(\lambda_j) P_j.$$

また, 射影の性質を用いると,

$$\begin{aligned} N &= A - S \\ &= A \sum_{l=1}^{r} P_l - \sum_{l=1}^{r} \lambda_l P_l \\ &= \sum_{l=1}^{r} (A - \lambda_l E) P_l \end{aligned}$$

A と P_l は可換であることに注意し, 射影の性質を用いると,

$$\begin{aligned} P_j N^m &= N^m P_j \\ &= \left\{ \sum_{l=1}^{r} (A - \lambda_l E)^m P_l \right\} P_j \\ &= (A - \lambda_j E)^m P_j. \end{aligned}$$

更に, 標数の定義より,

$$N^{k_j} = N^{k_j+1} = \cdots = N^n = O.$$

よって, 定理 12.1 より,

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{f^{(m)}(\lambda_j)}{m!} (A - \lambda_j E)^m P_j \\ &= \sum_{m=0}^{k_j-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{f^{(m)}(\lambda_j)}{m!} P_j N^m \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{f^{(m)}(S)}{m!} N^m. \end{aligned}$$

□

$R > 0$ とし, f が収束半径 R の巾級数を用いて

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad (z \in \mathbf{C},\ |z - z_0| < R)$$

と表される場合について, 簡単に述べておこう. このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理 12.4　次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\sigma(A)$ が f の収束円に含まれるならば,

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (A - z_0 E)^m.$$

(2) $|\lambda - z_0| > R$ となる $\lambda \in \sigma(A)$ が存在するならば, (1) の式の右辺は収束しない.

例 12.2　指数関数

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m$$

において, 右辺の収束半径は $+\infty$ だから, 定理 12.4 より, 問 12.3 の (2) の $f(A)$ は $\exp A$ となる.

最後に, 行列の正則関数のスペクトルについて考えよう. まず, $A, P \in M_n(\mathbf{C})$ とし, P は正則であるとする.

問 12.5　等式

$$\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$$

を示せ. (一方の固有値がもう一方の固有値となることを示す.)

また, f を $\sigma(A)$ を含む $\mathbf{C}$ の領域で正則な複素関数とする. 問 12.5 より, $f(A)$ および $f(P^{-1}AP)$ を考えることができるが, 実は次がなりたつ.

定理 12.5　$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$.

証明　境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域 D を f が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則となるように選んでおくと,

$$\begin{aligned} f(P^{-1}AP) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z)(zE - P^{-1}AP)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) P^{-1}(zE - A)^{-1} P dz \\ &= P^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z)(zE - A)^{-1} dz \right) P \\ &= P^{-1} f(A) P. \end{aligned}$$

□

行列の正則関数のスペクトルは元の行列のスペクトルの正則関数による像に一致する. すなわち, 次がなりたつ. 行列の指数関数の場合については, 問 4.8 も思い出すとよい.

定理 12.6 (Frobenius の定理)　$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

証明　定理 12.5 より, A が上三角行列の場合に示せばよい. このとき, $j = 1, 2, \ldots, n$ とし, A の (j, j) 成分を λ_j とおくと, $R(z)$ は (j, j) 成分が $\dfrac{1}{z - \lambda_j}$ の上三角行列となる. よって, D を定理 12.5 の証明のように選んでおくと, Cauchy の積分公式より, $f(A)$ は (j, j) 成分が $f(\lambda_j)$ の上三角行列となる. したがって,

$$\begin{aligned} \sigma(f(A)) &= \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)\} \\ &= f(\sigma(A)). \end{aligned}$$

□