§2. 正則関数と巾級数

実数 x を変数とする実数値関数 f の導関数 f' は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

により定められるのであった. §1 において扱ったように, $\mathbf{C}$ に対しても四則演算が定義され, 更に絶対値が $\mathbf{C}$ 上の距離を定めることから, 複素数を変数とする複素数値関数についても, 上と同様の式を考えることができる. なお, 実数を変数とする実数値関数を実関数, 複素数を変数とする複素数値関数を複素関数という.

定義 2.1 f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で定義された複素関数とし, $a \in D$ とする. 極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき, f は a で複素微分可能または単に微分可能であるという. f が D の各点で微分可能なとき, f は D で正則であるという. このとき,

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (z \in D)$$

により定まる D で定義された複素関数 f' を f の導関数という.

問 2.1 $n \in \mathbf{N}$ とし, $\mathbf{C}$ で定義された複素関数 f を

$$f(z) = z^n \quad (z \in \mathbf{C})$$

により定める. このとき, f は $\mathbf{C}$ で正則で,

$$f'(z) = nz^{n-1}$$

であることを示せ. (実関数の場合と同様.)

問 2.2 $\mathbf{C}$ で定義された複素関数 f を

$$f(z) = \bar{z} \quad (z \in \mathbf{C})$$

により定める. 次の問に答えることにより, f は $\mathbf{C}$ の任意の点で微分可能ではないことを示せ.

(1) $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ として, 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ を求めよ. (1)

(2) $h = ik$ $(k \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ として, 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ を求めよ. (-1)

まず, 複素関数の微分に関して次がなりたつ.

定理 2.1 f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で定義された複素関数とし, $a \in D$ とする. f が a で微分可能ならば, f は a で連続である.

問 2.3 定理 2.1 を示せ. (実関数の場合と同様.)

実関数の場合と同様に, 複素関数に対しても和や差や複素数倍, 更に, 積や商を考えることができる. このとき, 実関数の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 2.2 f, g を $\mathbf{C}$ の開集合 D で正則な複素関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$ $(z \in D)$. (複号同順)
(2) $c \in \mathbf{C}$ とすると, $(cf)'(z) = cf'(z)$ $(z \in D)$.
(3) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ $(z \in D)$. (積の微分法)
(4) $z \in D$, $g'(z) \neq 0$ のとき, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$. (商の微分法)

f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で正則な複素関数とし, $z \in D$ および f を

$$z = x + iy, \quad f = u + iv$$

と実部と虚部に分けておく. このとき, u, v は 2 変数 x, y の実数値関数とみなすことができる.

ここで, $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $z + h \in D$ となるように取っておくと, $f(z+h), u(x+h, y), v(x+h, y)$ が定義され,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i\frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}$$

である. f の正則性より, $h \to 0$ としたとき, 左辺は $f'(z)$ に収束するから,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

となる.

一方, $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $z + ik \in D$ となるように取っておくと, $f(z+ik), u(x, y+k), v(x, y+k)$ が定義され,

$$\frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i\frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik}$$

である. f の正則性より, $k \to 0$ としたとき, 左辺は $f'(z)$ に収束するから,

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

となる.

よって, D 上で等式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{$*$}$$

がなりたつ. これを Cauchy-Riemann の関係式という.

逆に, u, v が C^1 級であると仮定すると, Taylor の定理を用いることにより, $(*)$ から f の正則性を示すことができるが, 実は, u, v の偏微分可能性と $(*)$ のみから同じ結論を得られることが知られている.

問 2.4　次の (1), (2) により定められる $\mathbf{C}$ で正則な複素関数 f に対して, その実部 u および虚部 v を求め, u, v が $(*)$ をみたすことを示せ.
(1) $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbf{C})$. $(u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy)$
(2) $f(z) = z^3$ $(z \in \mathbf{C})$. $(u(x, y) = x^3 - 3xy^2,\ v(x, y) = 3x^2y - y^3)$

問 2.5　$\mathbf{C}$ で定義された複素関数 f を

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy \in \mathbf{C})$$

により定める. f は $\mathbf{C}$ で正則であることを示せ. ($(*)$ がなりたつことを示す.)

問 2.6 次の問に答えよ.
(1) 極形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を用いると, $(*)$ は

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

と表されることを示せ. (合成関数の微分法を用いる.)
(2) $\mathbf{C}$ の開集合 D を

$$D = \{z \in \mathbf{C} | z \neq 0, \ -\pi < \arg z < \pi\}$$

により定め, D で定義された複素関数 f を

$$f(z) = \log|z| + i\arg z \quad (z \in D)$$

により定める. f は D で正則であることを示せ. ((1) を用いる.)

問 2.7 f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で正則な複素関数とする. $z \in D$ および f を

$$z = x + iy, \quad f = u + iv$$

と実部と虚部に分けておく. D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とみなし, D から $\mathbf{R}^2$ への写像 φ を

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \quad ((x, y) \in D)$$

により定める. このとき, φ の Jacobian は D 上で 0 以上であることを示せ. ($(*)$ を用いる.)

次に, 巾級数について述べよう. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とし, $z_0 \in \mathbf{C}$ とすると, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を係数, z_0 を中心とする巾級数

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (z \in \mathbf{C}) \qquad (**)$$

を考えることができる. 実関数の場合の巾級数についてなりたつ基本的性質は $(**)$ で表されるような巾級数についてもなりたち, 絶対収束性についても定義することができる. 更に, 複素関数の列に対しても, 一様収束や広義一様収束といった概念を定義することができる.

問 2.8 実関数の場合について, 次の問に答えよ.
(1) 一様収束の定義を述べよ. (微分積分の教科書を調べよ.)
(2) 広義一様収束の定義を述べよ. (微分積分の教科書を調べよ.)

問 2.9 幾何級数

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (z \in \mathbf{C})$$

は $|z| < 1$ のとき $\dfrac{1}{1-z}$ に収束し, $|z| \geq 1$ のとき発散することを示せ. (部分和を考える.)

複素数平面で考えると, 問 2.9 において, 不等式 $|z| < 1$ は原点を中心とする半径 1 の円の内部を表すことに注意しよう. 一般の巾級数 $(**)$ については, $z = z_0$ の場合にのみ収束したり, あるいは任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して収束することもあるが, その他の場合は幾何級数の場合と同様に, z_0 を中心とするある円の内部で収束し, 外部で発散することを示すことができる.

定理 2.3 (Cauchy-Hadamard の定理) $(**)$ に対して, $0 \le R \le +\infty$ をみたす R を

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

により定める. ただし, 上の右辺の値が 0 の場合は $R = +\infty$ で, $+\infty$ の場合は $R = 0$ とする. このとき, $(**)$ は $|z - z_0| < R$ で絶対収束かつ広義一様収束し, $|z - z_0| > R$ で発散する.

定理 2.3 において現れた R を収束半径, 不等式 $|z - z_0| < R$ で表される集合を収束円という

問 2.10 上極限の定義を述べよ. (微分積分の教科書を調べよ.)

収束半径については, 次の判定法も知られている.

定理 2.4 (D'Alembert の判定法) R を $(**)$ の収束半径とする. 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が存在するならば, その値は $\dfrac{1}{R}$ に等しい.

問 2.11 $p \in \mathbf{N}$ のとき, 巾級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$$

の収束半径を求めよ. (1)

定理 2.3 より, 巾級数は収束円上で複素関数を定める. すなわち, $z \in \mathbf{C}$, $|z - z_0| < R$ のとき, $f(z) \in \mathbf{C}$ を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

により定めることができる. このように定めた f について, 次がなりたつ.

定理 2.5 f は収束円上で正則で,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

問 2.12 $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$ のとき, 次の (1), (2) の等式がなりたつことを示せ.
(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$. (幾何級数と定理 2.5 を用いる.)
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$. ((1) と定理 2.5 を用いる.)

定理 2.5 において, $f'(z)$ を表す右辺の級数は $(**)$ を項別に微分したものであることに注意しよう. また, 定理 2.5 を繰り返し用いることにより, 収束円上では f は何回でも微分可能で, k 次導関数 $f^{(k)}(z)$ は

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

によりあたえられる.

問 2.13 $(**)$ の収束半径が 0 でないとき, a_n を f の z_0 における高次の微分係数を用いて表せ. $(a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0))$