

§3. 初等関数

まず, 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

について考えよう. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

だから, 定理2.4より, 上の巾級数の収束半径は $+\infty$ である. よって, \mathbf{C} で正則な複素関数を上の巾級数によって定めることができる. これを $\exp z$ または e^z と書き, 指数関数という. すなわち,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbf{C})$$

である. z が実数の場合は上の式の右辺は微分積分において現れる指数関数に対する Maclaurin 展開に他ならない.

絶対収束する2つの級数の積は絶対収束することと絶対収束する級数の和は和の順序を変えても変わらないことを用いると, 指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbf{C})$$

を示すことができる.

問 3.1 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して, $e^z \neq 0$ であることを示せ. (指数法則を用いる.)

注意 3.1 定理2.5を用いると, 指数関数に対する微分方程式

$$(e^z)' = e^z$$

が得られる. 実は, 微分方程式の解の存在と一意性を用いると, 指数関数は微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

の一意的な解として特徴付けることもできる.

指数関数を用いて, 三角関数 $\cos z$ および $\sin z$ を

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbf{C})$$

により定める.

三角関数の定義より, 等式

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

がなりたつ.

問 3.2 次の (1), (2) の値を求めよ.

(1) $\cos i$. $(\frac{e^{-1}+e}{2})$

(2) $\sin i$. $(\frac{e-e^{-1}}{2}i)$

問 3.3 次の問に答えよ.

(1) $\cos z$ を巾級数を用いて表せ. $(\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n})$

(2) $\sin z$ を巾級数を用いて表せ. $(\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1})$

$\cos z$ の定義式に $\sin z$ の定義式の i 倍を加えると, 等式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

が得られる. これを Euler の公式という. 特に, Euler の公式において, $z = \pi$ を代入すると, 等式

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

が得られる. これを Euler の等式という. また, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) とおくと, 指数法則および Euler の公式より,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

となるから, e^z の極形式

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

が得られる. 問 2.5 も思い出すとよい. 更に,

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

がなりたち, e^z は周期 2π の周期関数となることが分かる.

三角関数について, その他の基本的性質を挙げておこう.

定理 3.1 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)~(3) がなりたつ.

(1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(2) $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

(3) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ (加法定理).

問 3.4 次の問に答えよ.

(1) 定理 3.1 の (1) を示せ. (三角関数の定義を用いる.)

(2) 定理 3.1 の (2) を示せ. (三角関数の定義を用いる.)

(3) 定理 3.1 の (3) を示せ. (三角関数の定義を用いる.)

問 3.5 次の問に答えよ.

(1) $\cos z \neq 0$ となる $z \in \mathbf{C}$ の条件を求めよ. (任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して $z \neq (k + \frac{1}{2})\pi$)

(2) (1) で求めた条件をみたす z に対して,

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

とおく. 加法定理

$$\tan(z+w) = \frac{\tan z + \tan w}{1 - \tan z \tan w}$$

を示せ. ($\cos z, \sin z$ の定義を用いる.)

問 3.6 $\sin z = 0$ となる $z \in \mathbf{C}$ を求めよ. ($z = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$))

双曲線関数 $\cosh z$ および $\sinh z$ も指数関数を用いて,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (z \in \mathbf{C})$$

により定められる. 三角関数および双曲線関数の定義より, 等式

$$\cos z = \cosh(iz), \quad i \sin z = \sinh(iz),$$

$$\cosh z = \cos(iz), \quad i \sinh z = \sin(iz)$$

がなりたつ. また, 等式

$$\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z$$

がなりたつ.

問 3.7 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)~(4) がなりたつことを示せ.

- (1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$. (双曲線関数の定義を用いる.)
- (2) $(\cosh z)' = \sinh z, (\sinh z)' = \cosh z$. (双曲線関数の定義を用いる.)
- (3) $\cosh 2z = 2 \cosh^2 z - 1$. (双曲線関数の定義を用いる.)
- (4) $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$. (双曲線関数の定義を用いる.)

実関数としての指数関数 e^x は定義域を \mathbf{R} , 値域を区間 $(0, +\infty)$ とし, 対数関数はその逆関数であった. すなわち, $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$y = e^x$$

とおくと, $y > 0$ で, これは

$$x = \log y$$

と同値であった. 問 3.1 より, 指数関数は変数を複素数としても 0 とはならないことに注意し, ここでは, $w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して方程式

$$e^z = w \quad (*)$$

をみたす $z \in \mathbf{C}$ を求めてみよう.

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) と表しておき, w は極形式を用いて

$$w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表しておく, (*) は

$$e^x(\cos y + i \sin y) = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

となる. よって, 両辺の絶対値をとると,

$$e^x = |w|$$

となり, 更に,

$$\cos y = \cos \theta, \quad \sin y = \sin \theta$$

となる. したがって,

$$x = \log |w|, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

となり, (*) は無限個の解をもつ.

上のように単に (*) を解くだけでは, 偏角が一意的に定まらないため, 複素関数としての指数関数 e^z の逆関数は通常の意味での関数とはならず, 無限個の値をとる無限多価関数となってしまふ. これを避け, e^z の逆関数を1つの値しかとらない一価関数にするには, 偏角のとりべき値が一意になるように, 例えば,

$$-\pi < \arg w \leq \pi$$

となるように指定しておけばよい. このような状況の下で,

$$\log w = \log |w| + i \arg w$$

と書き, $\log w$ を対数関数という.

以下では, 文字を置き換え, $\log w$ を $\log z$ と書くことにする. 実関数の場合と同様に, 正則関数に対しても逆関数の微分法がなりたつ. 特に, 値が一価となるような開集合を定義域として考えると, $\log z$ は正則で,

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

がなりたつ. 問 2.6 も思い出すとよい.

問 3.8 $\log z$ の偏角を次の (1), (2) のように指定したとき, $\log(-i)$ の値を求めよ.

(1) $-\pi < \arg z \leq \pi. (-\frac{\pi}{2}i)$

(2) $0 \leq \arg z < 2\pi. (\frac{3}{2}\pi i)$

微分積分において学んだように, $x > 0, a \in \mathbf{R}$ とすると, 等式

$$x^a = e^{a \log x}$$

がなりたつのであった. このことに注意すると, $\log z$ が一価となるように定義域を選んでおけば, $a \in \mathbf{C}$ に対しても z^a を

$$z^a = e^{a \log z}$$

により定めることができる.

問 3.9 値が一価となるような開集合を定義域として考え, 等式

$$(z^a)' = a z^{a-1}$$

を示せ. (合成関数の微分法を用いる.)

問 3.10 次の (1), (2) の値を求めよ.

(1) $2^i. (e^{-2k\pi}(\cos \log 2 + i \sin \log 2) (k \in \mathbf{Z}))$

(2) $i^i. (e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} (k \in \mathbf{Z}))$