§4. 行列の指数関数

§3 において定義した指数関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbf{C}) \tag{$*$}$$

の z に複素数を成分とする正方行列 A を代入したものを考え,

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

とおく. このとき, 右辺は任意の A に対して成分毎に収束することが分かる. $\exp A$ を A の指数関数という. 以下では上のような行列の級数が現れるが, 収束に関する厳密な議論は省略することとする.

例 4.1 A を (i,i) 成分が λ_i の n 次の対角行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表す. $k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

だから, $(*)$ より,

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \text{\huge 0} \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

特に, 零行列 O の指数関数は単位行列 E である. すなわち

$$\exp O = E.$$

問 4.1 A を次の (1), (2) の正方行列とする. $\exp A$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ($\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \frac{1}{2}\lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

(2) A はすべての成分が 1 の n 次の正方行列. ($E + \frac{e^n - 1}{n} A$)

問 4.2 m を 0 でない整数とし, $a, b, c \in \mathbf{C}$ が

$$a^2 + bc = -m^2 \pi^2$$

をみたすとする. このとき,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

とおく.
(1) $k = 0, 1, 2, \ldots$ のとき, A^{2k}, A^{2k+1} を求めよ. ($A^{2k} = (-1)^k m^{2k}\pi^{2k}E$, $A^{2k+1} = (-1)^k m^{2k}\pi^{2k}A$)
(2) $\exp A$ を求めよ. (m が偶数のとき E, m が奇数のとき $-E$)

問 4.3　零行列ではない 3 次の交代行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

と表しておき,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

とおく.
(1) $k = 0, 1, 2, \ldots$ のとき, A^{2k+1}, A^{2k+2} を求めよ. ($A^{2k+1} = (-1)^k r^{2k}A$, $A^{2k+2} = (-1)^k r^{2k}A^2$)
(2) $\exp A$ を求めよ. ($E + \frac{\sin r}{r}A + \frac{1-\cos r}{r^2}A^2$)

行列の指数関数の基本的性質について述べていこう.

定理 4.1　A, B を n 次の正方行列とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) A と B が可換ならば,

$$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B).$$

(2) $\exp A$ は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

証明　(1): $k = 0, 1, 2 \ldots$ とすると, A と B が可換ならば, 2 項展開

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l}$$

がなりたつ. よって,

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \left(\frac{1}{p!}A^p\right)\left(\frac{1}{q!}B^q\right) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}A^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}B^q\right) \\ &= (\exp A)(\exp B). \end{aligned}$$

(2): A と $-A$ は可換だから, (1) より,

$$\begin{aligned} (\exp A)\exp(-A) &= \exp(A - A) \\ &= \exp O \\ &= E. \end{aligned}$$

よって, $\exp A$ は正則で,

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

$\square$

問 4.4　$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$)

問 4.5　次の問に答えよ.

(1) $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} e^a\cos b & e^a \sin b \\ -e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}$)

(2) 2 次の正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $(\exp A)(\exp B)$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$)

(3) (2) において, $(\exp B)(\exp A)$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$)

(4) (2) において, $\exp(A+B)$ を求めよ. ($\begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$)

定理 4.2　A を正方行列とすると,

$$\exp {}^t\!A = {}^t(\exp A).$$

証明　$k = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$({}^t\!A)^k = {}^t(A^k)$$

がなりたつことを用いればよい. $\square$

定理 4.3　A が交代行列ならば, $\exp A$ は直交行列.

証明　${}^t\!A = -A$ だから, 定理 4.2 および定理 4.1 の (2) より,

$$\begin{aligned} {}^t\exp A &= \exp {}^t\!A \\ &= \exp(-A) \\ &= (\exp A)^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

行列 $A = (a_{ij})$ に対して, A の各成分の複素共役を成分とする行列を $\overline{A}$ と表す. すなわち,

$$\overline{A} = (\bar{a}_{ij})$$

である.

定理 4.4　A を正方行列とすると,

$$\exp \overline{A} = \overline{\exp A}.$$

証明　$k=0,1,2,\dots$ とすると,

$$(\overline{A})^k=\overline{A^k}$$

がなりたつことを用いればよい. □

問 4.6　A が歪 Hermite 行列ならば, $\exp A$ はユニタリ行列であることを示せ. (定理 4.3 と同様.)

次の定理は行列の指数関数を計算する際に用いることができる.

定理 4.5　A を n 次の正方行列, P を n 次の正則行列とすると,

$$\exp(P^{-1}AP)=P^{-1}(\exp A)P.$$

証明　$k=0,1,2,\dots$ とすると,

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^k&=\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{ 個}}\\&=P^{-1}A^kP\end{aligned}$$

がなりたつことを用いればよい. □

問 4.7　$A=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$ とおく.

(1) A は対角化可能であることを示せ. (固有値を求める.)

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ求めよ. (例えば, $\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}$)

(3) 自然数 k に対して, A^k を求めよ. ($-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2(-1)^k-2\cdot3^k&4(-1)^k-4\cdot3^k\\(-1)^k-3^k&-2(-1)^k-2\cdot3^k\end{pmatrix}$)

(4) $\exp A$ を求めよ. ($-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2e^{-1}-2e^3&4e^{-1}-4e^3\\e^{-1}-e^3&-2e^{-1}-2e^3\end{pmatrix}$)

問 4.8　正方行列 A のトレースを $\mathrm{tr}\,A$ と表す.

(1) トレースの定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

(2) A,B が同じ型の正方行列のとき,

$$\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA)$$

がなりたつことを示せ. (直接計算する.)

(3) A,P が同じ型の正方行列で, P が正則なとき,

$$\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}\,A$$

がなりたつことを示せ. ((2) を用いる.)

(4) A を正方行列とする. 任意の正方行列は上三角化可能であることを用いて,

$$\det\exp A=e^{\mathrm{tr}\,A}$$

がなりたつことを示せ. ((3) を用いる.)