§5. 曲線の長さ

Euclid 空間内の曲線に対して, その長さを考えることができる. 線分の長さは三平方の定理を用いて計算することができるが, 曲線の長さの場合は曲線を折れ線で近似すればよい.

問 5.1 三平方の定理の証明を 3 通り挙げよ. (初等幾何の教科書を調べよ.)

有界閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数として定義される曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

を考えよう. ただし, 以下では関数は C^1 級であるとする. このとき, γ の長さは定積分

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

により定められる.

問 5.2 γ を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された実数値関数 f のグラフとする. 実際に γ を折れ線で近似することにより, γ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}dt$$

となることを示せ. (微分積分の教科書を調べよ.)

問 5.3 $a,b>0$ とし, 楕円

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0,2\pi])$$

により定め, L を γ の長さとする.

(1) L を定積分を用いて表せ. なお, この定積分を楕円積分という. ($\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$)

(2) $a=b$ のとき, L の値を求めよ. ($2\pi a$)

問 5.4 γ を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数として定義される $\mathbf{R}^n$ 内の曲線とする.

(1) $\|v\|=1$ となる任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle \gamma(b)-\gamma(a), v\rangle = \int_a^b \langle \gamma'(t), v\rangle dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

がなりたつことを示せ. (右の不等式は Cauchy-Schwarz の不等式を用いる.)

(2) 不等式

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

がなりたつことを示せ. 特に, あたえられた端点を結ぶ曲線の中で長さが最も短いものは線分であることが分かる. ((1) を用いる.)

有界閉区間 $[a,b]$ に対して, 変数変換

$$\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$$

を考えよう. このとき, 曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して新たに曲線

$$\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$$

を定めることができる. γ と $\gamma \circ \varphi$ は定義域が異なるため, ベクトル値関数としては異なるが, 像は一致する. 実は, 更に γ と $\gamma \circ \varphi$ の長さも一致することが分かる.

まず, φ が向きを保つ, すなわち任意の $u \in [\alpha, \beta]$ に対して $\varphi'(u) > 0$ となる場合を考える. 合成関数の微分法と置換積分法より,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{du}(\gamma \circ \varphi)(u) \right\| du &= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(u))\varphi'(u)\| du \\ &= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(u))\|\varphi'(u) du \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

だから, γ と $\gamma \circ \varphi$ の長さは一致する.

φ が向きを逆にする, すなわち任意の $u \in [\alpha, \beta]$ に対して $\varphi'(u) < 0$ となる場合についても上と同様に計算することができる.

問 5.5 φ が向きを逆にする場合も γ と $\gamma \circ \varphi$ の長さは一致することを示せ. 上に述べたこととこのことより, 曲線の長さは径数表示に依存しないことが分かる. (直接計算する.)

以下では, 正則な曲線を考えることにする. このとき, 曲線は逆戻りすることなく点が動いて得られる軌跡とみなすことができるので, 直感的には点の動く速度を調節することにより, 速さを一定に保つことができそうである. 次に示すようにそれは正しい.

曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考え, $t_0 \in I$ を固定しておく. このとき, 関数

$$L : I \to \mathbf{R}$$

を

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt \quad (t \in I)$$

により定める. $L(t)$ を γ の t_0 から t までの長さという.

γ は正則としていることに注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \|\gamma'(t)\| \\ &> 0 \end{aligned}$$

だから, L は連続な単調増加関数となる. よって, L の像を J とおくと, J は区間で, 更に関数

$$L : I \to J$$

の逆関数

$$L^{-1} : J \to I$$

が存在する.

ここで, 曲線

$$\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^n$$

を

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ L^{-1}$$

により定める. γ と $\tilde{\gamma}$ はベクトル値関数としては異なるが, 像は一致する. 合成関数および逆関数の微分法より,

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(u) &= \gamma'(t)\frac{dL^{-1}}{du}\\ &= \gamma'(t)\frac{1}{\frac{dL}{dt}}\\ &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

したがって, $\tilde{\gamma}$ は正則で,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\gamma}'(u)\| &= \left\|\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right\|\\ &= 1\end{aligned}$$

である. 更に, $u_0 \in J$ を固定しておき, $u \in J$ とすると, $\tilde{\gamma}$ の u_0 から u までの長さは

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u} \left\|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\right\| du &= \int_{u_0}^{u} du\\ &= u - u_0\end{aligned}$$

となる. このことから次のように定義する.

定義 5.1　曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

は任意の $t \in I$ に対して

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

となるとき, 弧長により径数付けられているという. このとき, パラメータ t を弧長径数という.

問 5.6　原点中心, 半径 a の円

$$\gamma : [0, 2\pi a] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = \left(a\cos\frac{t}{a}, a\sin\frac{t}{a}\right) \quad (t \in [0, 2\pi a])$$

により定める. このとき, t は弧長径数であることを示せ. (弧長径数の定義を確かめる.)

問 5.7　$a > 0$ とし, 平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. γ を星芒形またはアステロイドという.
(1) $\gamma'(t)=0$ となる $t\in[0,2\pi]$ を求めよ. $(t=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi)$
(2) γ の長さを求めよ. $(6a)$
(3) $t_0\in[0,2\pi]$ を (1) で求めた以外の値とする. γ の $t=t_0$ における接線の陰関数表示を求めよ. $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|(\sin t_0)x+(\cos t_0)y=a\cos t_0\sin t_0\}$
(4) (3) の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする. 線分 AB の長さを求めよ. (a)

問 5.8　$a>0$ とし, 平面曲線

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))\quad(t\in[0,2\pi])$$

により定める. γ を擺線またはサイクロイドという.
(1) 擺線の読み方を答えよ. (辞書を調べよ.)
(2) $\gamma'(t)=0$ となる $t\in[0,2\pi]$ を求めよ. $(t=0,2\pi)$
(3) γ の長さを求めよ. $(8a)$

$\mathbf{R}^n$ 内の曲線とその曲線上で定義された関数に対して, 弧長に関する線積分というものを考えることができる.

定義 5.2　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n$$

および γ の像で連続な実数値関数 f に対して

$$\int_\gamma f ds=\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

とおき, これを f の γ 上の弧長に関する線積分という.

注意 5.1　定義 5.2 において, 特に $f=1$ とすることにより, $\int_\gamma ds$ は γ の長さとなる.

問 5.9　$a>0$ とし, 平面曲線

$$\gamma:[0,\pi]\to\mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t)\quad(t\in[0,\pi])$$

により定める. $\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 f を次の (1), (2) のように定めるとき, 弧長に関する線積分 $\int_\gamma f ds$ の値を求めよ.
(1) $f(x,y)=x\ ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. (0)
(2) $f(x,y)=y\ ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. $(2a^2)$
(3) $f(x,y)=x^2\ ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. $(\frac{\pi}{2}a^3)$
(4) $f(x,y)=xy\ ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. (0)
(5) $f(x,y)=y^2\ ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. $(\frac{\pi}{2}a^3)$

問 5.10　弧長に関する線積分は曲線の径数表示に依存しないことを示せ. (曲線の長さと同様.)