§7. 接線要素に関する線積分

定義 5.2 の弧長に関する線積分は, $\mathbf{R}^n$ 内の曲線とその曲線上で定義されたスカラー場に対して定義されるものということができる. ここでは, $\mathbf{R}^n$ 内の曲線とその曲線上で定義されたベクトル場に対して, 接線要素に関する線積分というものを考えよう. ただし, 接線要素に関する線積分を定義するためには曲線は向きというものを込みにして考える必要がある.

$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, γ の像の点 $\gamma(a)$ が γ に沿って $\gamma(b)$ まで進むと考えるとき,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n,\ \text{向き}\ t : a \to b$$

と表すことにする. このとき, γ を向き付けられた曲線という. １つの曲線に対しては２通りの向きが定まる. 上の γ とは逆向きの曲線を $\overline{\gamma}$ と表すことにする.

定義 7.1　向き付けられた $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n,\ \text{向き}\ t : a \to b$$

および γ の像で連続な n 次元ベクトル場 F に対して

$$\int_\gamma F\overrightarrow{ds} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

とおき, これを F の γ 上の接線要素に関する線積分という.

注意 7.1　定義 7.1 において, γ と逆向きの曲線 $\overline{\gamma}$ に対しては, 接線要素に関する線積分は

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\gamma}} F\overrightarrow{ds} &= \int_b^a \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= -\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= -\int_\gamma F\overrightarrow{ds}\end{aligned}$$

と計算され, 値の符号は変わる.

問 7.1　変数変換

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

が向きを保つとき, 接線要素に関する線積分に関して,

$$\int_\gamma F\overrightarrow{ds} = \int_{\gamma\circ\varphi} F\overrightarrow{ds}$$

がなりたつことを示せ. 特に, 接線要素に関する線積分は曲線の像とその向きのみに依存することが分かる. (置換積分法および合成関数の微分法を用いる.)

問 7.2　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$$

および γ の像で連続なスカラー場 f に対して,

$$\int_\gamma f ds = \int_\gamma F\overrightarrow{ds}$$

となるように, γ の向きおよび γ の像で連続な n 次元ベクトル場 F を定めよ. 特に, 弧長に関する線積分は接線要素に関する線積分の特別な場合である. (向き $t: a \to b$, $F(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$)

例 7.1 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t: 0 \to 1$$

を

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad (t \in [0,1])$$

により定め, 2 次元ベクトル場

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

を

$$F(x,y) = (x, -y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. このとき,

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\overrightarrow{ds} &= \int_0^1 \langle (t, -t^2), (1, 2t)\rangle dt \\ &= \int_0^1 (t - 2t^3)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

問 7.3 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t: 0 \to \pi$$

を

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0,\pi])$$

により定め, 2 次元ベクトル場

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

を

$$F(x,y) = (y, 2x) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. このとき, 接線要素に関する線積分 $\displaystyle\int_\gamma F\overrightarrow{ds}$ の値を求めよ. ($\frac{\pi}{2}$)

以下では, Green の定理について述べよう. まず, f を有界閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする. 有限個の点 $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$ が存在し, 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, f が $[c_{i-1}, c_i]$ で C^1 級となるとき, f は区分的に C^1 級であるという. 同様に, 区分的に C^1 級の平面曲線を定めることができる. そこで, D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となるような $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とする. ただし, D の境界には D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておき, これを ∂D と表す. このとき, ∂D 上の接線要素に関する線積分を上と同様に定めることができる.

定理 7.1 (Green の定理) F を D 上の C^1 級の 2 次元ベクトル場とする. このとき,

$$\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} = \iint_D \operatorname{rot} F\,dxdy.$$

証明　F を

$$F = (P, Q)$$

と表しておく. 積分の線形性より, $P = 0$ の場合と $Q = 0$ の場合に分けて考えればよいが, $Q = 0$ で, D が x について単純な領域

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

の場合のみ示す.

　向き付けられた平面曲線

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [a, b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : a \to b, \\
&\gamma_2 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : \varphi_1(b) \to \varphi_2(b), \\
&\gamma_3 : [a, b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : b \to a, \\
&\gamma_4 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : \varphi_2(a) \to \varphi_1(a)
\end{aligned}$$

をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, \varphi_1(t)) \quad (t \in [a, b]), \\
\gamma_2(t) &= (b, t) \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]), \\
\gamma_3(t) &= (t, \varphi_2(t)) \quad (t \in [a, b]), \\
\gamma_4(t) &= (a, t) \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)])
\end{aligned}$$

により定める. ここで,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} F\overrightarrow{ds} &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} \langle (P(\gamma_2(t)), 0), (0, 1) \rangle dt \\
&= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} 0 dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

同様に,

$$\int_{\gamma_4} F\overrightarrow{ds} = 0$$

だから,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} &= \int_{\gamma_1} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_2} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_4} F\overrightarrow{ds} \\
&= \int_{\gamma_1} F\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\overrightarrow{ds} \\
&= \int_a^b \langle (P(\gamma_1(t)), 0), (1, \varphi_1'(t)) \rangle dt + \int_b^a \langle (P(\gamma_3(t)), 0), (1, \varphi_2'(t)) \rangle dt \\
&= -\int_a^b (P(t, \varphi_2(t)) - P(t, \varphi_1(t))) dt \\
&= -\int_a^b [P(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\
&= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy
\end{aligned}$$

$$= \iint_D \operatorname{rot} F dxdy.$$

よって, Green の定理がなりたつ. □

問 7.4 Green の定理の証明において, $P = 0$ で D が y について単純な領域の場合の証明を補え. ($Q = 0$ で D が x について単純な領域の場合と同様.)

問 7.5 D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とし, D 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.

(1) 接線要素に関する線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} F\overrightarrow{ds}$ は D の面積に等しいことを示せ. なお, $F(x, y) = (0, x)$ または $(-y, 0)$ のときも上の値は D の面積に等しいことが分かる. (Green の定理を用いる.)

(2) $a, b > 0$ とする. D が楕円

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ. (πab)

(3) $a > 0$ とする. D がアステロイド

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ. ($\frac{3}{8}\pi a^2$)

(4) $a > 0$ とする. 極座標 (r, θ) を用いて, D がカージオイド

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ. ($\frac{3}{2}\pi a^2$)

問 7.6 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$$

により定める.

(1) $\operatorname{rot} F = 0$ を示せ. (直接計算する.)

(2) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, \text{ 向き } t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. 接線要素に関する線積分 $\displaystyle\int_\gamma F\overrightarrow{ds}$ の値を求めよ. (2π)