§8. 複素線積分と Cauchy の積分定理

有界閉区間で連続な複素関数の定積分は, 微分積分において学ぶ定積分を用いて自然に定義することができる. 実際, f を有界閉区間 $[a,b]$ で連続な複素関数とすると, f は

$$f = u + iv$$

と実部と虚部に分けることができるから, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ は

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

により定めるのである.

複素数平面 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{R}^2$ と同一視できるから, §7 において扱ったように, $\mathbf{C}$ 上の向き付けられた曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : a \to b$$

を考えることができる. よって, 更に f を γ の像で連続な複素関数とし,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

とおくことができる. これを f の γ 上の複素線積分という.

γ を

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [a,b])$$

と実部と虚部に分けておくと,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))(x'(t) + iy'(t))dt \\ &= \int_a^b (u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))dt \\ &\quad + i\int_a^b (v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t))dt\end{aligned}$$

となる. よって, γ の像で連続な 2 次元ベクトル場 F, G を

$$F = (u, -v),\ G = (v, u)$$

により定めると, §7 において扱ったことより,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F\overrightarrow{ds} + i\int_\gamma G\overrightarrow{ds}$$

となる.

問 8.1　$\mathbf{C}$ 上の向き付けられた曲線

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : 0 \to 1$$

を

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = 1 + it, \quad \gamma_3(t) = (1+i)(1-t) \quad (t \in [0,1])$$

により定め, $\mathbf{C}$ で定義された複素関数 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(z) = z, \quad f_2(z) = \bar{z}, \quad f_3(z) = |z| \quad (z \in \mathbf{C})$$

により定める. γ および f が次の (1)〜(9) によりあたえられるとき, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ の値を求めよ.

(1) $\gamma = \gamma_1$, $f = f_1$. $(\frac{1}{2})$
(2) $\gamma = \gamma_1$, $f = f_2$. $(\frac{1}{2})$
(3) $\gamma = \gamma_1$, $f = f_3$. $(\frac{1}{2})$
(4) $\gamma = \gamma_2$, $f = f_1$. $(-\frac{1}{2} + i)$
(5) $\gamma = \gamma_2$, $f = f_2$. $(\frac{1}{2} + i)$
(6) $\gamma = \gamma_2$, $f = f_3$. $(\frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}i)$
(7) $\gamma = \gamma_3$, $f = f_1$. $(-i)$
(8) $\gamma = \gamma_3$, $f = f_2$. (-1)
(9) $\gamma = \gamma_3$, $f = f_3$. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))$

問 8.2 $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$ とし, 中心 a, 半径 r の向き付けられた円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}, \text{ 向き } t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = a + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. $n \in \mathbf{Z}$ のとき, $\displaystyle\int_\gamma (z-a)^n dz$ の値を求めよ. ($n = -1$ のとき $2\pi i$, その他のとき 0)

問 8.3 f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で正則な複素関数とし,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}, \text{ 向き } t : a \to b$$

を像が D に含まれる向き付けられた曲線とする. このとき,

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

がなりたつことを示せ. (複素線積分の定義と合成関数の微分法を用いる.)

正則関数の複素線積分に関して, 次の Cauchy の積分定理がなりたつ.

定理 8.1 (Cauchy の積分定理) D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域とし, f を $D \cup \partial D$ を含む領域で正則な複素関数とする. このとき,

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

証明 f が $D \cup \partial C$ を含む領域で C^1 級の場合のみ, §7 において扱った Green の定理を用いて示す.

始めに述べたときと同じ記号を用いると, 等式

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D} F\overrightarrow{ds} + i\int_{\partial D} G\overrightarrow{ds}$$

がなりたつ. また, f の正則性より, Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

がなりたつ.

$\mathbf{C}$ を xy 平面とみなすと, Green の定理および Cauchy-Riemann の関係式より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)dz &= \int_D \mathrm{rot}\, F dxdy + i\int_D \mathrm{rot}\, G dxdy\\ &= \int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\\ &= \int_D 0dxdy + i\int_D 0dxdy\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

例 8.1 問 8.1 において, D を γ_1〜γ_3 で囲まれた $\mathbf{C}$ の有界な領域とする.

まず, f_1 は $\mathbf{C}$ で正則で, 問 8.1 の (1), (4), (7) より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f_1(z)dz &= \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\gamma_2} f_1(z)dz + \int_{\gamma_3} f_1(z)dz\\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}+i\right) + (-i)\\ &= 0\end{aligned}$$

となり, Cauchy の積分定理がなりたっていることが確認できる.

一方, f_2 は $D\cup\partial D$ を含む領域で正則とはならず, 問 8.1 の (2), (5), (8) より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f_2(z)dz &= \int_{\gamma_1} f_2(z)dz + \int_{\gamma_2} f_2(z)dz + \int_{\gamma_3} f_2(z)dz\\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+i\right) + (-1)\\ &= i\\ &\neq 0\end{aligned}$$

となり, Cauchy の積分定理がなりたっていないことが確認できる.

また, f_3 も $D\cup\partial D$ を含む領域で正則とはならず, 問 8.1 の (3), (6), (9) より,

$$\int_{\partial D} f(z)dz \neq 0$$

となることが分かる.

問 8.4 Cauchy の積分定理に関して, f の正則性は必要条件ではないことを例を挙げることにより示せ. (問 8.2 を思い出す.)

例 8.2 $r>0$ とし, 原点中心, 半径 r の向き付けられた円

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{C},\ \text{向き}\ t:0\to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. このとき, γ で囲まれた有界な領域を D とすると,

$$D = \{z \in \mathbf{C} || z| < r\}.$$

また, $a \in \mathbf{C}$, $|a| \neq r$ とし,

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

とおく.

$|a| > r$ のとき, f は $D \cup \partial D$ を含むある領域で正則となるから, Cauchy の積分定理より,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = 0.$$

$|a| < r$ のとき, 中心 a, 半径 ρ の向き付けられた円

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma_1(t) = a + \rho e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定め, 更に γ_1 の像が D に含まれるように ρ を十分小さく選んでおく. γ_1 の向きに注意すると, f は γ および $\bar{\gamma}_1$ で囲まれた領域で正則で, Cauchy の積分定理より,

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz + \int_{\bar{\gamma}_1} \frac{1}{z-a} dz = 0.$$

よって, 注意 7.1 および問 8.2 より,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz &= -\int_{\bar{\gamma}_1} \frac{1}{z-a} dz \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a} dz \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

問 8.5　$\mathbf{C}$ 上の向き付けられた円

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma_1(t) = 2e^{it}, \quad \gamma_2(t) = 1 + e^{it}, \quad \gamma_3(t) = -1 + e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める.

(1) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1} dz$ の値を求めよ. (0)

(2) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2-1} dz$ の値を求めよ. (πi)

(3) $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{1}{z^2-1} dz$ の値を求めよ. ($-\pi i$)