§9. Cauchy の積分公式

まず, 複素数平面上の曲線とその曲線上で定義された複素関数に対して, §8 において定めたものとは異なる複素線積分を定義しておこう.

定義 9.1　$\mathbf{C}$ 上の曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$$

および γ の像で連続な複素関数 f に対して

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

とおき, これを f の γ 上の弧長に関する複素線積分という.

注意 9.1　定義 9.1 において, $\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}^2$ と同一視しておくと,

$$|\gamma'(t)| = \|\gamma'(t)\|$$

だから, 定義 5.2 より,

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_\gamma f ds$$

と表すことができる. 特に, $\displaystyle\int_\gamma |dz|$ は γ の長さである.

問 9.1　$\mathbf{C}$ 上の曲線

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbf{C}$$

を

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = 1 + it, \quad \gamma_3(t) = (1+i)(1-t) \quad (t \in [0,1])$$

により定める.

(1) $\displaystyle\int_{\gamma_1} z|dz|$ の値を求めよ. $(\frac{1}{2})$

(2) $\displaystyle\int_{\gamma_2} z|dz|$ の値を求めよ. $(1+\frac{1}{2}i)$

(3) $\displaystyle\int_{\gamma_3} z|dz|$ の値を求めよ. $(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))$

§8 において扱った複素線積分は弧長に関する複素線積分で上から評価することができる.

定理 9.1　γ を有界閉区間で定義された $\mathbf{C}$ 上の向き付けられた曲線, f を γ の像で連続な複素関数とする. このとき,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|.$$

証明　極形式を用いて,

$$\int_\gamma f(z)dz = re^{i\theta}$$

と表しておき, γ が

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}, \text{ 向き } t : a \to b$$

と表される場合を考える. このとき,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right) \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt \\
&\le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\
&= \int_\gamma |f(z)||dz|.
\end{aligned}
$$

よって, あたえられた不等式がなりたつ.

γ の向きが上とは逆の場合も同様に計算することができる. □

§8 において扱った Cauchy の積分定理を用いることにより, 正則関数は複素線積分を用いて表されることが分かる.

定理 9.2 (Cauchy の積分公式) D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{C}$ の有界な領域とし, f を $D \cup \partial D$ を含む領域で正則な複素関数とする. このとき,

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (z \in D).
$$

証明 $a \in D$ を固定しておく. $\rho > 0$ に対して, 中心 a, 半径 ρ の向き付けられた円

$$
\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}, \ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi
$$

を

$$
\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])
$$

により定め, 更に γ_ρ の像が D に含まれるように ρ を十分小さく選んでおく. γ_ρ の向きに注意すると, ζ の関数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - a}$ は ∂D および $\bar{\gamma}_\rho$ で囲まれた領域で正則で, Cauchy の積分定理より,

$$
\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta + \int_{\bar{\gamma}_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta = 0.
$$

よって, 注意 7.1 および問 8.2 より,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta &= -\int_{\bar{\gamma}_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta \\
&= \int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta \\
&= \int_{\gamma_\rho}\frac{f(a)}{\zeta - a}d\zeta + \int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a}d\zeta \\
&= 2\pi i f(a) + \int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a}d\zeta.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
M(\rho) = \max\{|f(\zeta) - f(a)||\zeta - a| = \rho\}
$$

とおくと, 定理 9.1 および定理 2.1 より,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}d\zeta\right| &\le \int_{\gamma_\rho}\left|\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}\right||d\zeta| \\ &\le \int_{\gamma_\rho}\frac{M(\rho)}{\rho}|d\zeta| \\ &= 2\pi M(\rho)\to 0 \quad (\rho\to +0).\end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{\rho\to+0}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}d\zeta=0$$

だから,

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=2\pi i f(a).$$

a を z と置き替えることにより, あたえらえた等式が得られる. □

例 9.1 問 8.5 を思い出そう. $\mathbf{C}$ 上の向き付けられた円

$$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3:[0,2\pi]\to\mathbf{C},\ \text{向き}\ t:0\to 2\pi$$

を

$$\gamma_1(t)=2e^{it},\quad \gamma_2(t)=1+e^{it},\quad \gamma_3(t)=-1+e^{it}\quad (t\in[0,2\pi])$$

により定め, 3 つの複素線積分

$$(1)\ \int_{\gamma_1}\frac{1}{z^2-1}dz\quad (2)\ \int_{\gamma_2}\frac{1}{z^2-1}dz\quad (3)\ \int_{\gamma_3}\frac{1}{z^2-1}dz$$

の値を求めたのであった.

(2), (3) は Cauchy の積分公式を用いて計算することもできる. 例えば,

$$f(z)=\frac{1}{z+1}$$

とおき, γ_2 で囲まれた有界な領域を D とすると, f は $D\cup\partial D$ を含むある領域で正則となるから, Cauchy の積分公式より,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z^2-1}dz &= \int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-1}dz \\ &= 2\pi i f(1) \\ &= \pi i.\end{aligned}$$

問 9.2 例 9.1 において, (3) を Cauchy の積分公式を用いて計算せよ. ($f(z)=\frac{1}{z-1}$ とおく.)

問 9.3 $\mathbf{C}$ 上の向き付けられた曲線 γ を次の (1)〜(6) により定めるとき, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{1}{z^4-1}dz$ の値を求めよ.

(1) $\gamma(t)=1+\frac{1}{2}e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, 向き $t:0\to2\pi$. $(\frac{1}{4})$

(2) $\gamma(t)=i+\frac{1}{2}e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, 向き $t:0\to2\pi$. $(\frac{i}{4})$

(3) $\gamma(t)=-1+\frac{1}{2}e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$, 向き $t:0\to2\pi$. $(-\frac{1}{4})$

(4) $\gamma(t) = -i + \frac{1}{2}e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), 向き $t : 0 \to 2\pi$. ($-\frac{i}{4}$)

(5) $\gamma(t) = 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), 向き $t : 0 \to 2\pi$. (0)

(6) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), 向き $t : 0 \to 2\pi$. (0)

§2 において, 巾級数を用いて表される複素関数は収束円上で正則で, 何回でも微分可能であることを述べた. 逆に, Cauchy の積分公式を用いることにより, 正則関数は巾級数を用いて表されることが分かる. 特に, 正則関数は何回でも微分可能である.

定理 9.3 f を $\mathbf{C}$ の開集合 D で正則な複素関数とする. $a \in D$, $r > 0$ に対して, 中心 a, 半径 r の向き付けられた円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = a + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定め, γ の像および γ で囲まれた有界な領域が D に含まれるように r を十分小さく選んでおく. $z \in D$, $|z - a| < r$, $0 < \rho < r$ とし, 中心 a, 半径 ρ の向き付けられた円

$$\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbf{C},\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

ただし,

$$c_n = \frac{1}{2\pi a} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

証明 簡単のため, $a = 0$ の場合のみ示す.

$z \in D$, $|z| < \rho$ とすると, Cauchy の積分公式および問 2.9 より,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \dfrac{z}{\zeta}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n. \end{aligned}$$

更に, 定理 2.5 より,

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

□