§11. 行列式

ここでは, 線形変換の行列式について述べる. まず, 次の定理を用いて, 正方行列に対する行列式を定義することから始めよう.

定理 11.1 $\mathbf{R}^n$ の n 個の直積 $(\mathbf{R}^n)^n$ から $\mathbf{R}$ へ写像 $\Phi : (\mathbf{R}^n)^n \to \mathbf{R}$ が次の (1)〜(4) をみたすと仮定する. ただし, $a_1, \ldots, a_n, b, c \in \mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{R}$ である.

(1) 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$\begin{aligned}\Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, b + c, a_{i+1}, \ldots, a_n) &= \Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\ &\quad +\Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

(2) 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$\Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, ka_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = k\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

(3) $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$ とすると,

$$\begin{aligned}&\Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n)\\ &\quad = -\Phi(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

(4) e_1, e_2, $\ldots$, e_n を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとすると,

$$\Phi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$$

このとき, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

とおくと,

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

である. ただし, $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n}$ はすべての $\sigma \in S_n$ について, 和を考えることを意味する.

そこで, n 次行列 $A = (a_{ij})$ に対して,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

とおき, これを A の行列式という. $|A|$ は

$$\det A, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |a_{ij}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等とも表す. 絶対値の記号と間違える恐れのあるときは, $|\quad|$ 以外の記号を用いた方がよい. なお, 定理 11.1 の (1), (2) の条件を多重線形性, (3) の条件を交代性という.

例 11.1 例 10.5 より, 1 次行列 (a_{11}) の行列式は

$$\begin{aligned}|a_{11}| &= (\operatorname{sgn} \varepsilon) a_{11}\\ &= a_{11}\end{aligned}$$

である．また, 2 次行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式は

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (\operatorname{sgn}\varepsilon)a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(1\ 2)a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

である．

問 11.1　3 次行列の行列式について, 等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

がなりたつことを示せ．

注意 11.1　例 11.1 および問 11.1 より, 2 次および 3 次の行列の行列式は成分を右下がりに選んで掛けるときは $+$ を, 左下がりに選んで掛けるときは $-$ をそれぞれ付けることにより得られると覚えればよい．これを Sarrus の方法またはたすき掛けの方法という．なお, 4 次以上の行列の行列式については, この計算方法は一般には正しくないので注意が必要である．

行列式について, 次がなりたつ．

定理 11.2　等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

がなりたつ．

問 11.2　行列式の定義を用いることにより, 定理 11.2 を示せ．

問 11.3　$A = (a_{ij})$ を正方行列とする．等式

$$a_{ij} = 0 \quad (i > j)$$

がなりたつとき, A を上三角行列という．上三角行列の行列式は対角成分の積であることを示せ．

また, 次がなりたつことが分かる．

定理 11.3　A を正方行列とすると, $|{}^tA| = |A|$ である．

問 11.4　$A = (a_{ij})$ を正方行列とする．等式

$$a_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

がなりたつとき, A を下三角行列という．下三角行列の行列式は対角成分の積であることを示せ．

定理 11.1 および行列式の定義より, 行列式は行に関して, 多重線形性と交代性をみたすが, 定理 11.3 より, これらの性質は列についてもなりたつ．

問 11.5　次の問に答えよ．

(1) 行列式の交代性を用いることにより, 2 つの行が等しい正方行列の行列式は 0 であることを示せ. 同様に, 2 つの列が等しい正方行列の行列式は 0 である.
(2) 行列式の多重線形性および (1) を用いることにより, 1 つの行に他の行の何倍かを加えても, 行列式は変わらないことを示せ. 同様に, 1 つの列に他の列の何倍かを加えても, 行列式は変わらない.

問 11.6　行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

を計算せよ.

問 11.7　奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを示せ.

行列式の定義を用いることにより, 定理 11.2 の一般化として, 次を示すことができる.

定理 11.4　A を m 次行列, B を $m \times n$ 行列, C を $n \times m$ 行列, D を n 次行列とすると, 等式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

がなりたつ.

例 11.2　A, B を n 次行列とすると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= |A+B||A-B| \end{aligned}$$

である. ただし, 最初の等式では, 各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して, 第 i 行に第 $(n+i)$ 行を加えた. また, 2 つめの等式では, 各 $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して, 第 $(n+i)$ 列から第 i 列を引いた. 更に, 最後の等式では, 定理 11.4 を用いた.

問 11.8　A, B を n 次行列とすると, 等式

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2$$

がなりたつことを示せ. ただし, 右辺の i は虚数単位で, $|\quad|$ は複素数に対する絶対値を表す.

問 11.9　行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

の値が 0 となるような a の値を求めよ.

定理 11.4 を用いることにより, 行列の積の行列式はそれぞれの行列の行列式の積となることが分かる. すなわち, 次がなりたつ.

定理 11.5　A, B を n 次行列とすると, 等式

$$|AB| = |BA| = |A||B|$$

がなりたつ.

問 11.10　A を正則行列とすると, $|A| \neq 0$ で, 等式

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

がなりたつことを示せ.

問 11.11　巾零行列の行列式は 0 であることを示せ.

問 11.12　直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

更に, 次がなりたつ.

定理 11.6　A を n 次行列, P を n 次の正則行列とすると, 等式

$$|PAP^{-1}| = |A|$$

がなりたつ.

問 11.13　定理 11.6 を示せ.

定理 9.2 および定理 11.6 より, 行列式はベクトル空間の線形変換に対しても定めることができる. 実際, ベクトル空間の基底を選んでおき, その基底に関する線形変換の表現行列の行列式を線形変換の行列式と定めればよい. なお, 定理 11.3 より, 表現行列を注意 9.1 で述べたように定義しても, 線形変換に対する行列式は変わらない.

問 11.14　$W \subset M_2(\mathbf{R})$ を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める.
(1) W は $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間であることを示せ.
(2) $E_1, E_2 \in W$ を

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $\{E_1, E_2\}$ は W の基底であることを示せ.
(3) $A \in W$ とし,

$$f(X) = XA \quad (X \in W)$$

とおく. f は W の線形変換を定めることを示せ.
(4) W の基底 $\{E_1, E_2\}$ に関する f の表現行列を A を用いて表せ.
(5) f のトレースおよび行列式を A のトレース, 行列式を用いて表せ.