§3. 行列

定理 2.3 で述べたように, $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像 $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ は mn 個の実数 a_{11}, a_{21}, $\dots$, a_{mn} を用いて,

$$f(x) = (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_ma_{m1}, \dots, x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \cdots + x_ma_{mn}) \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

と表されるのであった. ただし, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ である. 上の式は a_{11}, a_{21}, $\dots$, a_{mn} を長方形状に並べたものを考え,

$$f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とも表す.

一般に, $i = 1, 2, \dots, m$ および $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, 数 a_{ij} が対応しているとき, これらの数を長方形状に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

のように並べたものを $m \times n$ 行列または m 行 n 列の行列という. 行列の行の個数と列の個数を合わせて型またはサイズという. また, 上の行列を (m, n) 型の行列ともいう. 上の行列を A とおいたとき, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ または単に $A = (a_{ij})$ とも表す. 更に,

$$a_{ij}, \quad \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ A の (i, j) 成分, 第 i 行, 第 j 列という. なお, 行列の第 i 行は $\mathbf{R}^n$ の元のように

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

とも表す. 特に, n 次の行ベクトルは $1 \times n$ 行列で, m 次の列ベクトルは $m \times 1$ 行列である. また，1×1 行列は (a) と表されるが, 数 a と同一視し, 単に a と表すことが多い. 更に, すべての (i, j) 成分が実数, 複素数となる行列をそれぞれ実行列, 複素行列ともいう. 数のことをスカラーともいう.

$f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ をそれぞれ $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^p$ から $\mathbf{R}^q$ への線形写像とする. このとき, 上で述べたことより, f, g はそれぞれ m 行 n 列の実行列 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, p 行 q 列の実行列 $B = (b_{kl})_{p\times q}$ を用いて,

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^m), \quad g(y) = yB \quad (y \in \mathbf{R}^p) \tag{$*$}$$

と表される. よって, $f = g$ となるのは, 写像が等しいことの定義より, $m = p$ かつ $n = q$ で, 任意の $i = 1, 2, \dots, m$ および $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, $a_{ij} = b_{ij}$ がなりたつとき, すなわち, A と B が同じ型で, 対応する成分がそれぞれ等しいときである. そこで, 次のように定める.

定義 3.1　$A=(a_{ij})_{m\times n}$ を $m\times n$ 行列, $B=(b_{kl})_{p\times q}$ を $p\times q$ 行列とする. A と B が同じ型で, 対応する成分がそれぞれ等しいとき, $A=B$ と表し, A と B は等しいという. また, $A=B$ でないときは $A\neq B$ と表す.

問 3.1　次の等式がなりたつように a, b, c の値を求めよ.
(1) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
(2) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 1 & 2ca \\ 1 & 1 & 1 \\ 2ca & 1 & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2bc & 1 \\ 2bc & c^2+a^2 & 2ab \\ 1 & 2ab & 1 \end{pmatrix}$.

$(*)$ の第 1 式において, f が特別な線形写像の場合に, 対応する A がどのようなものになるのかを考えよう.

例 3.1 (零行列)　$f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ を零写像とする. このとき, $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbf{R}^m$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &= (0,\dots,0) \\ &= (x_1\cdot 0+x_2\cdot 0+\cdots+x_m\cdot 0,\dots,x_1\cdot 0+x_2\cdot 0+\cdots+x_m\cdot 0) \\ &= (x_1,x_2,\dots,x_m)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから, $(*)$ の第 1 式において, A のすべての成分は 0 である. すべての成分が 0 の $m\times n$ 行列を $O_{m,n}$ または O と表し, 零行列という.

問 3.2　等式

$$O_{2,2}=\begin{pmatrix} x^3-6x^2+11x-6 & x^3-2x^2-5x+6 \\ x^3-4x^2+x+6 & x^3-7x-6 \end{pmatrix}$$

がなりたつように x の値を求めよ.

例 3.2 (正方行列)　$(*)$ の第 1 式において, $m=n$ のとき, f は $\mathbf{R}^n$ の線形変換で, A は $n\times n$ 行列となる. $n\times n$ 行列を n 次の正方行列または n 次行列という. このとき, A の $(1,1)$ 成分, $(2,2)$ 成分, $\dots$, (n,n) 成分を A の対角成分という.

例えば, 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は 2 次の正方行列であり, その対角成分は a, d である. また, 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ は 3 次の正方行列であり, その対角成分は a_{11}, a_{22}, a_{33} である.

問 3.3　A を (i,j) 成分が次のように定められる 3 次の正方行列とする. A を具体的に表せ.
(1) $a_{ij}=(-1)^{i+j}$.
(2) $a_{ij}=(-1)^{ij}$.

$c \in \mathbf{R}$ とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を

$$f(x) = cx \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. ここで, $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= c(x+y) \\ &= cx + cy \\ &= f(x) + f(y), \end{aligned}$$

すなわち,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

である. さらに, $k \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} f(kx) &= c \cdot kx \\ &= k \cdot cx \\ &= kf(x), \end{aligned}$$

すなわち,

$$f(kx) = kf(x)$$

である. よって, f は $\mathbf{R}^n$ の線形変換である. このとき, $(*)$ の第 1 式における A は

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

となる. このような A をスカラー行列という.

対角成分がすべて 1 の n 次のスカラー行列を E_n または E と表し, n 次の単位行列という. n 次の単位行列は I_n や I と表すこともある.

例 3.3 1 次, 2 次, 3 次の単位行列はそれぞれ

$$E_1 = (1) = 1, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

により, 0 または 1 の値をとる記号 δ_{ij} を定め, δ_{ij} を Kronecker の δ という.

例 3.4 $i, j = 1, 2$ のとき, δ_{ij} の値は

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

である.

また, $i, j = 1, 2, 3$ のとき, δ_{ij} の値は

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

である.

Kronecker の δ を用いると, n 次の単位行列 E_n は $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ と表すことができる. 例えば,

$$E_2 = (\delta_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. また,

$$E_3 = (\delta_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

問 3.4　次の行列の (i, j) 成分を Kronecker の δ を用いて表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

問 3.5　$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ とし, $\mathbf{R}^n$ の線形変換 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を

$$f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となるように定める. ただし, e_1, e_2, $\ldots$, e_n は $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルである. $(*)$ の第 1 式における A の成分をすべて求めよ. このような A を対角行列という. 特に, スカラー行列は対角行列であることが分かる.

問 3.6　3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を考える. A がスカラー行列, 対角行列となるとき, A をそれぞれ具体的に表せ.