§4. 行列の演算

ベクトル空間の間の線形写像全体の集合はベクトル空間となる．まず, V, W をベクトル空間とし, V から W への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ と表す．V の線形変換全体の集合, すなわち, $\mathrm{Hom}\,(V,V)$ は $\mathrm{End}\,(V)$ とも表す．

問 4.1　V から W への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}\,(V,W)$, V の線形変換全体の集合を $\mathrm{End}\,(V)$ と表す理由を述べよ．

$f, g \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$, $c \in \mathbf{R}$ に対して, V から W への写像 $f+g, cf : V \to W$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x) \quad (x \in V)$$

により定める．このとき, 次がなりたつ．

定理 4.1　V, W をベクトル空間とし, $f, g \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$, $c \in \mathbf{R}$ とする．このとき, $f+g, cf \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ である．更に, $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ は上で定めた和およびスカラー倍に関してベクトル空間となる．

問 4.2　次の問に答えよ．
(1) 定理 4.1 において, $f+g, cf \in \mathrm{Hom}\,(V,W)$ であることを示せ．
(2) 定理 4.1 において, $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ．
(3) 定理 4.1 において, $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ．
(4) 定理 4.1 において, $\mathrm{Hom}\,(V,W)$ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ．

特に, V から $\mathbf{R}$ への線形写像全体の集合, すなわち, $\mathrm{Hom}\,(V,\mathbf{R})$ は V^* とも表し, V の双対ベクトル空間または単に双対空間ともいう．

§3 で述べたように, 数ベクトル空間の間の線形写像には行列が対応するのであった．そこで, 数ベクトル空間の間の写像の和やスカラー倍にどのような行列が対応するのかを考えよう．以下では, $m, n \in \mathbf{N}$ に対して, m 行 n 列の実行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と表すことにする．n 次実行列全体の集合は $M_n(\mathbf{R})$ とも表す．

$f, g \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ とする．このとき, ある $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ が存在し, f, g は

$$f(x) = xA, \quad g(x) = xB \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

と表される．よって,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= xA + xB \\
&= (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1}, \ldots, x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn}) \\
&\quad + (x_1 b_{11} + x_2 b_{21} + \cdots + x_m b_{m1}, \ldots, x_1 b_{1n} + x_2 b_{2n} + \cdots + x_m b_{mn}) \\
&= (x_1(a_{11} + b_{11}) + \cdots + x_m(a_{m1} + b_{m1}), \ldots, x_1(a_{1n} + b_{1n}) + \cdots + x_m(a_{mn} + b_{mn}))
\end{aligned}$$

である．したがって, $f+g$ には (i,j) 成分が $a_{ij} + b_{ij}$ の $m \times n$ 行列が対応する．

同様に, $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, cf には (i,j) 成分が ca_{ij} の $m \times n$ 行列が対応することが分かる．

問 4.3 $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, cf には (i,j) 成分が ca_{ij} の $m \times n$ 行列が対応することを示せ.

そこで, 行列の和とスカラー倍を次のように定める.

定義 4.1 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする. このとき, A と B の和 $A+B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

により定める. 更に, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, A の c によるスカラー倍 cA を

$$cA = (ca_{ij})$$

により定める.

定義 4.1 のように和とスカラー倍を定めると, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ もベクトル空間となることが分かる.

問 4.4 次の問に答えよ.
(1) $M_{m,n}(\mathbf{R})$ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ.
(2) $M_{m,n}(\mathbf{R})$ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ.
(3) $M_{m,n}(\mathbf{R})$ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ.

問 4.5 次の計算をせよ.
(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
(2) $3 \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

定理 2.4 で述べたように, 線形写像の合成は線形写像となるのであった. 次は, 数ベクトル空間の間の線形写像の合成にどのような行列が対応するのかを考えよう. $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^l, \mathbf{R}^m)$, $g \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ とする. このとき, 合成写像 $g \circ f : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^n$ を考えることができるが, これは線形写像である. また, ある $A = (a_{ij}) \in M_{l,m}(\mathbf{R})$, $B = (b_{jk}) \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ が存在し, f, g は

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^l), \quad g(y) = yB \quad (y \in \mathbf{R}^m)$$

と表される. よって,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(x) \\
&\ = g(f(x)) \\
&\ = g((x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_l a_{l1}, \cdots, x_1 a_{1m} + x_2 a_{2m} + \cdots + x_l a_{lm})) \\
&\ = \left(\left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_{i1} \right) b_{11} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_{im} \right) b_{m1}, \dots, \left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_{i1} \right) b_{1n} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_{im} \right) b_{mn} \right) \\
&\ = \left(x_1 \sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_{j1} + \cdots + x_l \sum_{j=1}^{m} a_{lj} b_{j1}, \dots, x_1 \sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_{jn} + \cdots + x_l \sum_{j=1}^{m} a_{lj} b_{jn} \right)
\end{aligned}$$

である. したがって, $g \circ f$ には (i,k) 成分が $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$ の $l \times n$ 行列が対応する. そこで, 行列の積を次のように定める.

定義 4.2 $A=(a_{ij})$ を $l \times m$ 行列, $B=(b_{jk})$ を $m \times n$ 行列とする. このとき, A と B の積 AB を

$$AB=(c_{ik}), \quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \quad (i=1,2,\ldots,l,\ k=1,2,\ldots,n)$$

により定める.

問 4.6 次の計算をせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

行列の積の基本的な性質として, 積の演算が可能な型の単位行列を掛けても変わらないことが挙げられる. すなわち, A を $m \times n$ 行列とすると,

$$E_mA=AE_n=A$$

である. また, 積の演算が可能な型の零行列を掛けたものは零行列となる.

A, B をともに n 次の正方行列とする. このとき, 2 種類の積 AB および BA はともに n 次の正方行列である. しかし, この 2 つは必ずしも等しくなるとは限らない. $AB=BA$ がなりたつとき, A と B は可換または交換可能であるという. A と B が可換でないことを非可換であるともいう.

問 4.7 次の行列 A, B が可換であるかどうかを調べよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

問 4.8 2 つの行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が可換となるような a の値を求めよ.

写像の合成が結合律をみたすことや線形写像の性質より, 次がなりたつ. なお, 以下では和や積を考えるときは, 行列の型は演算が可能なものであるとする.

定理 4.2 A, B, C を行列とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $(AB)C=A(BC)$. (積の結合律)

(2) $(A+B)C = AC + BC$. (分配律)
(3) $A(B+C) = AB + AC$. (分配律)
(4) c をスカラーとすると, $(cA)B = A(cB) = c(AB)$.

注意 4.1　積の結合律より, $(AB)C$ および $A(BC)$ は, 通常の数の掛け算と同様に, ともに ABC と書いても構わない.

次の定理の証明より, スカラー行列は行列の積に関しては, スカラー倍と同じ役割を果たすことが分かる. これがスカラー行列という名前の由来である.

定理 4.3　任意の n 次のスカラー行列と任意の n 次の正方行列は可換である.

証明　n 次のスカラー行列はスカラー c と n 次の単位行列 E を用いて, cE と表されることに注意する. また, A を n 次の正方行列とする. このとき, 定理 4.2 (4) より,

$$\begin{aligned}(cE)A &= c(EA)\\ &= cA\end{aligned}$$

である. 同様に,

$$\begin{aligned}A(cE) &= c(AE)\\ &= cA\end{aligned}$$

である. よって, cE と A は可換である. □

注意 4.1 より, 正方行列の巾乗を考えることができる. すなわち, A を正方行列とし, $n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき, A を n 回掛けたものを A^n と表し, A の n 乗という. ただし, $A^0 = E$ と約束する. このとき, 通常の数の掛け算と同様に, 指数法則

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

がなりたつ. また, ある $n \in \mathbf{N}$ に対して $A^n = O$ となるとき, A を巾零行列という. 通常の数では巾乗が零ならば, もとの数も零であるが, 行列の場合は必ずしもそうであるとは限らない.

問 4.9　正方行列 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は巾零行列であることを示せ.

問 4.10　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 等式

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$$

がなりたつことを示せ. この事実を Cayley-Hamilton の定理という.

問 4.11　A を巾零行列, B を A と可換な正方行列とする. このとき, AB は巾零行列であることを示せ.