§5. 複素数

複素数は2次の実行列を用いて表すことができる．そのことについて述べる前に, まず通常の複素数の定義から始めよう．複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$$

と表される．ただし, i は虚数単位である．$a \in \mathbf{R}$ に対して, 複素数 $a + 0i$ は単に a とも表す．また, $z = a + bi \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ に対して,

$$\mathrm{Re}\, z = a, \quad \mathrm{Im}\, z = b$$

とおき, これらをそれぞれ z の実部, 虚部という．そして, $z, w \in \mathbf{C}$ に対して,

$$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w, \quad \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$$

がなりたつとき, $z = w$ と表し, z と w は等しいという．

問 5.1　$z \in \mathbf{C}$ の実部, 虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ と表す理由を述べよ．

$\mathbf{R}$ における和および積と等式

$$i^2 = -1$$

を用いることにより, $z, w \in \mathbf{C}$ に対して, 和 $z + w \in \mathbf{C}$ および積 $zw \in \mathbf{C}$ を定めることができる．すなわち, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

である．このとき, $\mathbf{C}$ はベクトル空間となることが分かる．ただし, $\mathbf{C}$ におけるスカラー倍とは複素数倍のことであり, 正確には $\mathbf{C}$ は $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間である．

問 5.2　次の問に答えよ．
(1) $\mathbf{C}$ が定義 1.1 の (1), (2) の条件をみたすことを示せ．
(2) $\mathbf{C}$ が定義 1.1 の (3), (7), (8) の条件をみたすことを示せ．
(3) $\mathbf{C}$ が定義 1.1 の (4), (5), (6) の条件をみたすことを示せ．

また, 積については次がなりたつ．

定理 5.1　$z, w, v \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $zw = wz$. (積の交換律)
(2) $(zw)v = z(wv)$. (積の結合律)
(3) $z \neq 0$ とすると, $zz^{-1} = 1$ となる $z^{-1} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する．

証明　(1) のみ示す．
$z = a + bi$, $w = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ と表しておく．$\mathbf{C}$ における積の定義より,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

である．また, $\mathbf{R}$ における和および積の交換律より,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (c + di)(a + bi) \\ &= (ca - db) + (cb + da)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

である．よって, (1) がなりたつ． □

定理 5.1 (3) における z^{-1} を乗法に関する z の逆元という．また, 積の結合律より, $(zw)v$ および $z(wv)$ はともに zwv と書いても構わない．

問 5.3 次の問に答えよ．
(1) 定理 5.1 (2) を示せ．
(2) 定理 5.1 (3) を示せ．

$\mathbf{R}$ と同様に, $\mathbf{C}$ においても商を考えることができる．$z, w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$ とする．まず, 定理 5.1 (3) より, $w^{-1} \in \mathbf{C}$ が一意的に存在する．更に, 定理 5.1 (1) より,

$$zw^{-1} = w^{-1}z$$

である．よって, z の w による商 $\dfrac{z}{w} \in \mathbf{C}$ を

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

により定めることができる．

問 5.4 $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$, $c \in \mathbf{R}$ のとき, $\dfrac{z-c}{z+c}$ の実部, 虚部を求めよ．

実数を係数とする 1 変数の代数方程式の解は必ずしも実数の解をもつとは限らない．しかし, 数の範囲を複素数にまで拡げると, 次がなりたつことが知られている．

定理 5.2 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする 1 変数の代数方程式は少なくとも 1 つの複素数の解をもつ．

問 5.5 実数を係数とする 1 変数の代数方程式の定義を述べよ．

問 5.6 次の方程式をみたす複素数 z を求めよ．
(1) $z^4 + 1 = 0$.
(2) $z^2 = 1 + i$.

$z = a + bi \in \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ に対して, $\bar{z} \in \mathbf{C}$ を

$$\bar{z} = a - bi$$

により定める．$\bar{z}$ を z の共役複素数という．共役複素数に関して, 次がなりたつ．

定理 5.3 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)〜(5) がなりたつ．
(1) $\bar{\bar{z}} = z$.
(2) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
(3) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$, (複号同順)
(4) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
(5) $w \neq 0$ のとき, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

証明 (1) のみ示す．
$z = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$ と表しておくと,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \overline{\overline{a+bi}} \\
&= \overline{a-bi} \\
&= a+bi \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

である. よって, (1) がなりたつ. □

問 5.7　次の問に答えよ.
(1) 定理 5.3 (2) を示せ.
(2) 定理 5.3 (3) を示せ.
(3) 定理 5.3 (4) を示せ.
(4) 定理 5.3 (5) を示せ.

$z = a + bi \in \mathbf{C}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\
&= a^2 + b^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

である. よって, 0 以上の実数 $|z|$ を

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

により定めることができる. 特に, $|z| = 0$ となるのは $z = 0$ のときに限る. $|z|$ を z の絶対値という. 絶対値に関して, 次がなりたつ.

定理 5.4　$z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $|zw| = |z||w|$.
(2) $w \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

問 5.8　次の問に答えよ.
(1) 定理 5.4 (1) を示せ.
(2) 定理 5.4 (2) を示せ.

更に, 次がなりたつ.

定理 5.5　$z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\bar{w}$.
(2) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. (中線定理)
(3) $|z+w| \leq |z| + |w|$. (三角不等式)

問 5.9　次の問に答えよ.
(1) 定理 5.5 (1) を示せ.
(2) 定理 5.5 (2) を示せ.
(3) 定理 5.5 (3) を示せ.

$\mathbf{C}$ から $\mathbf{R}^2$ への写像 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(a+bi) = (a, b) \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

により定める. f は全単射となるから, f によって, $\mathbf{C}$ を平面 $\mathbf{R}^2$ とみなすことができる. このとき, $\mathbf{C}$ を複素数平面ともいう.

O を複素数平面 $\mathbf{C}$ の原点とし, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して, z の表す点を P とすると, $|z|$ は線分 OP の長さでもある. よって, $r = \mathrm{OP}$ とおき, 平面ベクトル $(1,0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とすると,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表すことができる. このような表し方を z の極形式という. また, $\theta = \arg z$ と表し, これを z の偏角という. θ は 2π の整数倍の差を除いて一意的に定まる.

問 5.10 $z \in \mathbf{C}$ の偏角を $\arg z$ と表す理由を述べよ.

極形式に関して, 次がなりたつ.

定理 5.6 (de Moivre の定理) $\theta \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

がなりたつ.

問 5.11 de Moivre の定理を証明せよ.

問 5.12 de Moivre の定理を用いることにより, 3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

を示せ.

さて, 複素数を 2 次の実行列を用いて表そう. 2 次の実行列全体からなる集合 $M_2(\mathbf{R})$ の部分集合 X を

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

により定め, $\mathbf{C}$ から X への写像 $\varphi : \mathbf{C} \to X$ を

$$\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 次がなりたつ.

定理 5.7 $z, w \in \mathbf{C}$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w)$.
(2) $\varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$.

問 5.13 次の問に答えよ.
(1) 定理 5.7 (1) を示せ.
(2) 定理 5.7 (2) を示せ.

φ は全単射で, $\varphi(1) = E_2$ だから, 定理 5.7 より, X は φ を通して四則演算も込めて複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ とみなすことができる.