§8. 基底変換と正則行列

ベクトル空間に対する基底の選び方は１通りではない．有限次元のベクトル空間の場合, １つの基底からもう１つの基底への変換は正方行列を用いて表すことができる．以下では, 特に断らない限り, ベクトル空間は有限次元で, 零空間ではないとする．

まず, 準備として, 基底に関するベクトルの成分について述べておこう．V を n 次元のベクトル空間, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし, $x \in V$ とする．このとき, 定義 7.2 の (2) の条件より, ある $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R})$$

となる．これを

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

または

$$x = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表す．x_1, x_2, $\ldots$, x_n を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する x の成分という．

問 8.1　基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する x の成分は一意的であることを示せ．

例 8.1　$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とし, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

である．よって, $\mathbf{R}^n$ の標準基底に関する x の成分は x_1, x_2, $\ldots$, x_n である．

例 8.2　$a_1, a_2 \in \mathbf{R}^2$ を

$$a_1 = (1, 1), \quad a_2 = (0, 1)$$

により定め, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ とする．例 7.3 で述べたことより, $\{a_1, a_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底で, 基底 $\{a_1, a_2\}$ に関する x の成分は x_1, $x_2 - x_1$ である．

問 8.2　$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とすると, $\{e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底であることを示せ．更に, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ とし, 基底 $\{e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\}$ に関する x の成分を求めよ．

問 8.3　$a_1, a_2 \in \mathbf{R}^2$ を

$$a_1 = (1, 0), \quad a_2 = (1, 1)$$

により定める．このとき, $\{a_1, a_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．更に, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ とし, 基底 $\{a_1, a_2\}$ に関する x の成分を求めよ．

問 8.4　$a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = (1, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 1)$$

により定める．このとき, $\{a_1, a_2, a_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ．更に, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ とし, 基底 $\{a_1, a_2, a_3\}$ に関する x の成分を求めよ．

それでは, 基底の変換について述べよう. V を n 次元のベクトル空間, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を V の基底とする. このとき, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, 基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する w_i の成分を p_{i1}, p_{i2}, $\ldots$, p_{in} とする. すなわち,

$$w_i = p_{i1}v_1 + p_{i2}v_2 + \cdots + p_{in}v_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

である. そこで, $P \in M_n(\mathbf{R})$ を $P = (p_{ij})$ により定め, 上の式をまとめて

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

と表す. P を基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列という. 問 8.1 より, 基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列 P は一意的である.

注意 8.1 成分の場合と同様に, 基底変換は

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)P'$$

と表し, 上で定めた P の代わりに, P' を基底変換行列という場合もある. このとき, $P' = {}^tP$ である.

問 8.5 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の基底とする. このとき, 基底変換 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の基底変換行列を求めよ.

問 8.6 $\{e_1, e_2\}$ を $\mathbf{R}^2$ の標準基底とし, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}^2$ を

$$a_1 = (1, 1), \quad a_2 = (0, 1), \quad b_1 = (1, 0), \quad b_2 = (1, 1)$$

により定める. このとき, 例 7.3 および問 8.3 より, $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底である.
(1) 基底変換 $\{a_1, a_2\} \to \{e_1, e_2\}$ の基底変換行列を求めよ.
(2) 基底変換 $\{b_1, b_2\} \to \{e_1, e_2\}$ の基底変換行列を求めよ.
(3) 基底変換 $\{a_1, a_2\} \to \{b_1, b_2\}$ の基底変換行列を求めよ.
(4) 基底変換 $\{b_1, b_2\} \to \{a_1, a_2\}$ の基底変換行列を求めよ.

問 8.7 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を $\mathbf{R}^3$ の標準基底とし, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (0, 0, 1), \quad b_1 = (1, 0, 0), \quad b_2 = (1, 1, 0), \quad b_3 = (1, 1, 1)$$

により定める. このとき, 問 7.8 および問 8.4 より, $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である.
(1) 基底変換 $\{a_1, a_2, a_3\} \to \{e_1, e_2, e_3\}$ の基底変換行列を求めよ.
(2) 基底変換 $\{b_1, b_2, b_3\} \to \{e_1, e_2, e_3\}$ の基底変換行列を求めよ.
(3) 基底変換 $\{a_1, a_2, a_3\} \to \{b_1, b_2, b_3\}$ の基底変換行列を求めよ.
(4) 基底変換 $\{b_1, b_2, b_3\} \to \{a_1, a_2, a_3\}$ の基底変換行列を求めよ.

基底変換について, 次がなりたつ.

定理 8.1 V を n 次元のベクトル空間, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を V の基底, P, Q をそれぞれ基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列とする. このとき, 基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列は QP である.

問 8.8　定理 8.1 を示せ.

定理 8.1 において, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ とすると, P, Q は等式

$$PQ = QP = E$$

をみたす. 一般に, n 次行列 A に対して, ある n 次行列 B が存在し,

$$AB = BA = E$$

となるとき,

$$B = A^{-1}$$

と表し, これを A の逆行列という. このとき, A は正則または可逆であるという. よって, 基底変換行列は正則である. 正則行列について, まず, 次がなりたつ.

定理 8.2　正方行列が正則ならば, その逆行列は一意的である.

証明　A を正則行列, B, C を A の逆行列とする. このとき,

$$\begin{aligned} B &= BE \\ &= B(AC) \\ &= (BA)C \\ &= EC \\ &= C, \end{aligned}$$

すなわち, $B = C$ である. よって, A の逆行列は一意的である. □

また, 次がなりたつことが分かる.

定理 8.3　A を n 次行列とする. $AB = E$ または $BA = E$ の少なくとも一方をみたす n 次行列 B が存在するならば, B は A の逆行列である.

正則行列とその逆行列の例を挙げておこう.

例 8.3　単位行列 E は正則で, $E^{-1} = E$ である.

例 8.4　A を直交行列とする. 直交行列の定義より,

$$A\,{}^tA = {}^tAA = E$$

であるから, A は正則で, $A^{-1} = {}^tA$ である.

零行列, 単位行列, 逆行列は数でいえば, それぞれ 0, 1, 逆数に相等するものであるが, もとの正方行列が零行列ではないとしても, 必ずしもその逆行列が存在するとは限らない.

問 8.9　正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は存在しないことを背理法により示せ.

2 次行列については, 次がなりたつ.

定理 8.4　2 次行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ で, このとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である.

問 8.10　定理 8.4 を示せ.

また, 次がなりたつ.

定理 8.5　A, B を n 次の正則行列とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(2) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明　(1), (2) のみ示す.
(1): 逆行列の定義より, 明らかである.
(2): 逆行列の定義より,

$$AA^{-1} = E$$

である. この式の両辺の転置をとると, 定理 6.1 (2) より,

$${}^t(A^{-1}){}^tA = E$$

である. よって, 定理 8.3 より, ${}^tA$ は正則で, (2) がなりたつ. □

注意 8.2　定理 8.5 (2) より, $({}^tA)^{-1}$ および ${}^t(A^{-1})$ はともに ${}^tA^{-1}$ と書いても構わない.

問 8.11　定理 8.5 (3) を示せ.

問 8.12　A を n 次行列とする. ある $n \times m$ 行列 B が存在し,

$$AB = O, \quad B \neq O$$

ならば, A は正則ではないことを示せ.

問 8.13　$A_{11}, A_{12}, A_{22}, X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ を n 次行列とし, $2n$ 次行列 A および X を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

により定める.
(1) 積 AX を計算せよ.
(2) A_{11}, A_{22} が正則ならば, A は正則であることを示し, A の逆行列を求めよ.

問 8.14　A を n 次行列とする.
(1) $m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$$

を計算せよ.
(2) A が巾零行列ならば, $E - A$ は正則であることを示せ.
(3) A が巾零行列ならば, $E + A$ は正則であることを示し, $E + A$ の逆行列を求めよ.

問 8.15　A を n 次行列とする. $E + A$ が正則ならば,

$$E + (E - A)(E + A)^{-1}$$

も正則であることを示せ.