

## §8. 正規直交標構

平面曲線または空間曲線を考える際に現れる Frenet の標構は各点において  $\mathbf{R}^2$  または  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底をあたえる. 曲面の場合にもこのようなものを考えよう.

曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

に対して3つの写像

$$e_1, e_2, e_3: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を次の(1)~(3)をみたすように選んでおく.

- (1) 任意の  $(u, v) \in D$  に対して  $\{e_1(u, v), e_2(u, v), e_3(u, v)\}$  は  $\mathbf{R}^3$  の正規直交基底.
- (2) 任意の  $(u, v) \in D$  に対して  $p(u, v) + e_1(u, v)$  および  $p(u, v) + e_2(u, v)$  は  $p(u, v)$  における接平面上にある.
- (3)  $e_3 = e_1 \times e_2$  で, 更に  $e_3$  は  $p$  の単位法ベクトル.

組  $\{e_1, e_2, e_3\}$  を正規直交標構という.

このとき,  $D$  で定義されたある関数  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  が存在し,

$$p_u = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad p_v = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

ここで,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \times (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \times e_2 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3 \\ &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\|p_u \times p_v\|} p_u \times p_v \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \|p_u \times p_v\| \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと,  $A$  は行列式が正の2次の正方行列に値をとる関数となる.

ここで,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を  $p$  の第一基本形式とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} ({}^t p_u, {}^t p_v) \\ &= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} ({}^t e_1, {}^t e_2) {}^t A \\ &= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t A \\ &= A {}^t A. \end{aligned}$$

$p$  上の曲線

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくとし、

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2 \\ &= (\dot{u}, \dot{v}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \\ &= (\dot{u}, \dot{v}) A^t A \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって、

$$\theta = (\dot{u}, \dot{v}) A$$

とおくと、

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \theta^t \theta.$$

また、

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を  $p$  の第二基本形式とすると、

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\gamma}, e_3 \rangle &= L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2 \\ &= (\dot{u}, \dot{v}) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \\ &= \theta A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}^t (\theta A^{-1}) \\ &= \theta A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}^t A^{-1t} \theta. \end{aligned}$$

よって、

$$B = A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}^t A^{-1}$$

とおくと、 $B$  は実対称行列に値をとる関数で、

$$\langle \ddot{\gamma}, e_3 \rangle = \theta B^t \theta.$$

正規直交標構の選び方は一意的ではない。  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  も  $p$  の正規直交標構とすると、上の  $B$  がどのように変わるのかを調べてみよう。

正規直交標構の定義より、

$$e_3 = \bar{e}_3$$

で、ある写像

$$T : D \rightarrow \text{SO}(2)$$

が存在し

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$$

と表される. ただし,  $SO(2)$  は行列式が 1 の 2 次の直交行列全体の集合である. よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= AT \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち, 上の行列値関数  $A$  は正規直交標構を取り替えることにより  $AT$  となる. 更に,

$$\begin{aligned} (AT)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t(AT)^{-1} &= T^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t(T^{-1}A^{-1}) \\ &= T^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^tA^{-1}{}^tT^{-1} \\ &= T^{-1}BT. \end{aligned}$$

すなわち, 上の行列値関数  $B$  は正規直交標構を取り替えることにより  $T^{-1}BT$  となる. したがって,  $B$  の固有値, 行列式, トレースは正規直交標構の選び方に依らずに定まる. 例えば,

$$\begin{aligned} \det B &= \left| A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^tA^{-1} \right| \\ &= \left| {}^tA^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| (A^tA)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right| \left| \begin{matrix} L & M \\ M & N \end{matrix} \right| \\ &= \left| \begin{matrix} E & F \\ F & G \end{matrix} \right|^{-1} \left| \begin{matrix} L & M \\ M & N \end{matrix} \right| \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

これは  $p$  の Gauss 曲率である.

## 問題 8

## 1. 曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

に対する正規直交標構を  $\{e_1, e_2, e_3\}$  とし,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

と表しておく. また,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を  $p$  の第二基本形式とし,

$$B = A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t A^{-1}$$

とおく.  $p$  の平均曲率は  $\frac{1}{2}\text{tr} B$  に等しいことを示せ.

2.  $a > 0$  とする. 原点中心, 半径  $a$  の球面の一部

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め,

$$\begin{cases} e_1 = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ e_2 = (-\sin v, \cos v, 0), \\ e_3 = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{cases}$$

とおく. このとき,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  は  $p$  に対する正規直交標構となる. また,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

と表しておく.

(1)  $A$  を求めよ.

(2) 問題 7 においても扱ったように,  $p$  の第二基本形式は

$$-adu^2 - a \sin^2 u dv^2$$

によりあたえられる. 2 次の正方行列に値をとる関数  $B$  を

$$B = A^{-1} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \sin^2 u \end{pmatrix} {}^t A^{-1}$$

により定め,  $\det B$  および  $\frac{1}{2}\text{tr} B$  をそれぞれ計算することにより,  $p$  の Gauss 曲率および平均曲率を求めよ.

## 問題 8 の解答

1.  $p$  の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &= \operatorname{tr} A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \\ &= \operatorname{tr} {}^t A^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{tr} (A^t A)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{tr} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{GL - FM - FM + EN}{EG - F^2} \\ &= \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

よって,  $p$  の平均曲率は  $\frac{1}{2}\operatorname{tr} B$  に等しい.

2. (1) まず,

$$p_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u), \quad p_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0).$$

よって,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \sin u \end{pmatrix}.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \sin u \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{a^2 \sin u} \begin{pmatrix} a \sin u & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a \sin u} \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{a \sin u} \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \sin^2 u \end{pmatrix} \frac{1}{a \sin u} \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 \sin^2 u} \begin{pmatrix} -a \sin u & 0 \\ 0 & -a \sin^2 u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,  $p$  の Gauss 曲率は

$$\det B = \frac{1}{a^2}.$$

また,  $p$  の平均曲率は

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} B = -\frac{1}{a}.$$