

## §1. Riemann 多様体

Riemann 多様体とは各接空間に内積があたえられている多様体である. 簡単のため, 多様体などは  $C^\infty$  級ものを考えよう.  $C^\infty$  級多様体  $M$  に対して,  $p \in M$  における接空間を  $T_p M$  と表し,  $M$  上の  $C^\infty$  級ベクトル場全体の集合を  $\mathfrak{X}(M)$  と表すことにする.

**定義**  $M$  を  $C^\infty$  級多様体とする. 各  $p \in M$  において  $T_p M$  の内積

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbf{R}$$

があたえられているとし,  $p$  から  $g_p$  への対応を  $g$  と表す. 任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して,  $p$  から  $g_p(X_p, Y_p)$  への対応が  $M$  上の  $C^\infty$  級関数を定めるとき,  $g$  を  $M$  の Riemann 計量という. このとき, 組  $(M, g)$  を  $C^\infty$  級 Riemann 多様体という.

Riemann 計量は座標近傍を用いて表すことができる.

$(M, g)$  を  $n$  次元  $C^\infty$  級 Riemann 多様体とし,  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$  とする.

$(U, \varphi)$  を  $p \in U$  となる座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad v = \sum_{j=1}^n b_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p$$

と表しておく. ただし,

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$$

である.

このとき,

$$\begin{aligned} g_p(u, v) &= g_p \left( \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \sum_{j=1}^n b_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$g_{ij} = g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right)$$

とおくと,

$$g_p(u, v) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}.$$

$g_p$  は  $T_p M$  の内積だから,  $n$  次の正方行列  $(g_{ij})$  は正定値実対称行列である.  $M$  上の  $C^\infty$  級曲線

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M$$

に対して, 積分

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

を  $\gamma$  の長さという.

内積はベクトル空間上の正定値 2 次対称形式と言い替えることができる. このことと曲線の長さの定義から, 上の Riemann 計量  $g$  を

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

と表すこともある.

### 例 (Euclid 空間)

$\mathbf{R}^n$  は  $C^\infty$  級多様体であるが, そもそも標準内積という内積をもつベクトル空間であった.

$p \in \mathbf{R}^n$  とし,  $T_p \mathbf{R}^n$  を  $\mathbf{R}^n$  と自然に同一視しておく.

このとき, 標準内積を用いることにより,  $\mathbf{R}^n$  は  $C^\infty$  級 Riemann 多様体となる.

$\mathbf{R}^n$  の Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2$$

と表すことができる.

Riemann 多様体  $\mathbf{R}^n$  上の曲線の長さは微分積分において扱う曲線の長さに他ならない.

### 例 (第一基本形式)

$\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  からの  $C^\infty$  級写像として表される径数付き部分多様体

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を考えよう. このとき,  $p$  の像  $p(D)$  は 2 次元  $C^\infty$  級多様体となる.

$(u_0, v_0) \in D$  を固定しておき,  $\Pi$  を  $p(u_0, v_0)$  における  $p$  の接平面とすると,

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と具体的に表すことができる.  $\Pi$  は 3 次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下ではこの部分空間も  $\Pi$  と表すことにする.

$\mathbf{R}^3$  の標準内積を用いて,

$$p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \in \Pi \quad ((u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{R}^2)$$

に対して

$$\langle p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \rangle \in \mathbf{R}$$

を対応させる.  $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$  は 1 次独立であるから, この対応は  $\Pi$  の内積を定め,  $p(D)$  は Riemann 多様体となる.

$D$  で定義された関数  $E, F, G$  を

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

により定めると, Riemann 計量は

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と表すことができる. これは曲面  $p$  の第一基本形式である.

**例**  $M$  を  $C^\infty$  級多様体,  $g, h$  をともに  $M$  の Riemann 計量とする.

$p \in M$  に対して

$$(g+h)_p(u, v) = g_p(u, v) + h_p(u, v) \quad (u, v \in T_p M)$$

とおくと,  $g+h$  は  $M$  の Riemann 計量を定める.

なお, パラコンパクト多様体に対しては 1 の分割を用いることにより, Riemann 計量の存在を示すことができる. 実際, 局所的に構成した Riemann 計量を 1 の分割を用いて, 上のように足し合わせればよい.

また,  $\varphi$  を正の値をとる  $M$  上の  $C^\infty$  級関数とし,

$$(\varphi g)_p(u, v) = \varphi(p)g_p(u, v) \quad (u, v \in T_p M)$$

とおくと,  $\varphi g$  は  $M$  の Riemann 計量を定める.  $\varphi g$  は  $g$  に共形的であるという.

Riemann 多様体へのはめ込みに対しては誘導計量という自然な Riemann 計量を考えることができる. 特に, 誘導計量は Riemann 多様体の部分多様体に対して考えることができる.

$M$  を  $C^\infty$  級多様体,  $(N, g)$  を  $C^\infty$  級 Riemann 多様体,  $f$  を  $M$  から  $N$  へのはめ込みとする. すなわち, 任意の  $p \in M$  に対して  $p$  における  $f$  の微分

$$(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

は単射である.

このとき,  $u, v \in T_p M$  に対して

$$(f^*g)_p(u, v) = g_{f(p)}((df)_p(u), (df)_p(v))$$

とおく.

$g$  は  $N$  の Riemann 計量であるから,  $(f^*g)_p$  は  $M$  の Riemann 計量  $f^*g$  を定める.  $f^*g$  を  $f$  による  $g$  の誘導計量という.

### 例 (第一基本形式)

$\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  からの  $C^\infty$  級写像として表される正則な曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を考えよう.

$D$  から Riemann 多様体  $\mathbf{R}^3$  へのはめ込み  $p$  による  $\mathbf{R}^3$  の Riemann 計量の誘導計量は曲面  $p$  の第一基本形式に他ならない.

特に,  $p$  が径数付き部分多様体の場合は  $p(D)$  は Riemann 多様体となり, その Riemann 計量は曲面の第一基本形式である.

Riemann 多様体の間の写像に対しては長さを変えないものを考えることができる.

**定義**  $(M, g), (N, h)$  を  $C^\infty$  級 Riemann 多様体,  $f$  を  $M$  から  $N$  へのはめ込みとする.  $f^*h = g$  がなりたつとき, すなわち任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$(f^*h)(X, Y) = g(X, Y)$$

がなりたつとき,  $f$  を等長はめ込みという.

更に,  $f$  が  $C^\infty$  級微分同相写像のとき,  $f$  を等長写像という.

### 関連事項 1. 等長変換

Riemann 多様体から同じ Riemann 多様体への等長写像は等長変換ともいう。

Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  の等長変換がどのように表されるか調べてみよう。

$f$  を  $\mathbf{R}^n$  の等長変換とする.  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $\mathbf{R}^n$  の直交座標とすると, 等長変換の定義より, 任意の  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}$$

がなりたつ. ただし,  $\langle, \rangle$  は  $\mathbf{R}^n$  の標準内積で,  $\delta_{ij}$  は Kronecker の  $\delta$  である.

よって,  $k = 1, 2, \dots, n$  とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

添字  $i, j, k$  をそれぞれ  $j, k, i$  あるいは  $k, i, j$  と入れ替えると,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

ここで,  $f$  ははめ込みであるから, 任意の  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right\}$$

は  $\mathbf{R}^n$  の基底となる.

したがって, 任意の  $i, j = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

となるから,  $f$  は  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の 1 次式である.

更に, 最初の式に戻るにより,  $f$  は  $n$  次の直交行列  $A$  と  $b \in \mathbf{R}^n$  を用いて,

$$f(x) = xA + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表すことができる.

等長変換全体の集合は写像の合成に関して群となり, これを等長変換群という.

一般に, 連結な Riemann 多様体の等長変換群は, 群としての構造のみならず, 多様体としての構造もち, Lie 群というものになることが知られている. この事実を Myers と Steenrod の定理という.