§6. Fisher 計量

統計的モデルは Euclid 空間の開集合を用いて径数付けられていることから, 多様体とみなすことができるが, そればかりでなく Fisher 計量という Riemann 計量も兼ね備えている.
Ω を高々可算集合または $\mathbf{R}^k$ とし,

$$S = \{p(x;\xi) | \xi \in \Xi\}$$

を Ω 上の n 次元統計的モデルとする. このとき, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Xi$ に対して

$$g_{ij}(\xi) = \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \log p(x;\xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \log p(x;\xi) \right) p(x;\xi) dx \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

とおく. ただし, Ω が高々可算集合の場合も和は積分の形で表すこととする. $G(\xi) = (g_{ij}(\xi))$ とおくと, 各 $g_{ij}(\xi)$ が有限のとき, $G(\xi)$ は n 次実対称行列となる. $G(\xi)$ を ξ における S の Fisher 情報行列という. $n = 1$ のときは Fisher 情報量ともいう.
確率関数または密度関数 $p(x;\xi)$ の定める期待値を E_ξ と表し,

$$l_\xi(x) = \log p(x;\xi), \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

とおくと,

$$g_{ij}(\xi) = E_\xi \left[\partial_i l_\xi \partial_j l_\xi \right]$$

である. 以下では, $G(\xi)$ の各成分は有限で, ξ に関して C^∞ 級であると仮定する.
$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned}
cG(\xi)^t c &= \sum_{i,j=1}^n c_i c_j g_{ij}(\xi) \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n c_i \partial_i l_\xi \right) \left(\sum_{j=1}^n c_j \partial_j l_\xi \right) p(x;\xi) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n c_i \partial_i l_\xi \right)^2 p(x;\xi) dx \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

だから, $G(\xi)$ は半正定値である. 以下では, 更に $G(\xi)$ は正定値であると仮定する.
S を ξ を局所座標系とする n 次元多様体とみなし, $p(x;\xi)$ における接空間を単に $T_\xi S$ と表すことにする. $G(\xi)$ は正定値であると仮定しているから, $T_\xi S$ の内積 g を

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) = g_{ij}(\xi) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

により定めることができる. このとき, g は座標近傍の選び方に依存しないことが分かるから, g は S の Riemann 計量を定める. g を情報計量または Fisher 計量という.
§5 において現れた統計的モデルの場合の Fisher 情報行列はすべて正定値となる.

例 §5 における 1 つめの例を考えよう. すなわち, S は有限集合

$$\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

上の n 次元統計的モデルで,

$$\Xi = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1 \right\},$$

$$p(x_i; \xi) = \begin{cases} \xi_i & (i = 1, 2, \dots, n), \\ 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j & (i = 0) \end{cases}$$

である.
$i = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$\partial_i l_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_i} & (x = x_i), \\ \dfrac{-1}{1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j} & (x = x_0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} g_{ij}(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} \partial_i l_\xi(x_k) \partial_j l_\xi(x_k) p(x_k; \xi) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{\xi_i} + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} \xi_k}. \end{aligned}$$

ただし, δ_{ij} は Kronecker の δ である.

例　Poisson 分布に対する確率関数を用いて表される統計的モデルの場合を考えよう. すなわち, S は可算集合

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

上の 1 次元統計的モデルで,

$$\Xi = \{\xi | \xi > 0\},$$

$$p(x; \xi) = e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \quad (x \in \Omega)$$

である.
このとき,

$$\partial_1 l_\xi(x) = -1 + \frac{x}{\xi}.$$

よって,

$$\begin{aligned} g_{11}(\xi) &= \sum_{x=0}^{\infty} \partial_1 l_\xi(x) \partial_1 l_\xi(x) p(x; \xi) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - 2\frac{x}{\xi} + \frac{x^2}{\xi^2} \right) e^{-\xi} \frac{\xi^x}{x!} \\ &= \frac{1}{\xi}. \end{aligned}$$

例　正規分布に対する密度関数を用いて表される統計的モデルの場合を考えよう．すなわち, S は $\mathbf{R}$ 上の 2 次元統計的モデルで,

$$\Xi = \{(\mu, \sigma) | \mu \in \mathbf{R},\ \sigma > 0\},$$

$$p(x; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x \in \mathbf{R})$$

である．
このとき,

$$\begin{cases} \partial_1 l_\xi(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma^2}, \\ \partial_2 l_\xi(x) = -\dfrac{1}{\sigma} + \dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}. \end{cases}$$

$p(x;\xi)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に対する密度関数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} g_{11}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 p(x;\xi)dx \\ &= \frac{1}{\sigma^4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^4 p(x;\xi)dx &= -\sigma^2 \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^3 \frac{dp}{dx} dx \\ &= -\sigma^2 \left[(x-\mu)^3 p(x;\xi)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{\mathbf{R}} 3(x-\mu)^2 p(x;\xi)dx \\ &= 3\sigma^2 \cdot \sigma^2 \\ &= 3\sigma^4 \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} g_{22}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} \left\{-\frac{1}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}\right\}^2 p(x;\xi)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left\{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{2(x-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^6}\right\} p(x;\xi)dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^4}\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^6} \cdot 3\sigma^4 \\ &= \frac{2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

更に, $g_{12}(\xi), g_{21}(\xi)$ の被積分関数は $x-\mu$ について奇関数であるから,

$$g_{12}(\xi) = g_{21}(\xi) = 0.$$

関連事項 6. 体積要素

M を n 次元 C^∞ 級多様体とし, M の各点で 0 とならない C^∞ 級 n 次微分形式 ω が存在すると仮定しよう．このとき, M は向き付け可能である．実際, M の向き付けをあたえる局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ として

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$$

となるもの達を選んでおけばよい．上のように向き付けられた M に対して, ω を M の体積要素という．

逆に, M が向き付け可能で, 更にパラコンパクトならば, 1 の分割を用いることにより, M の各点で 0 とならない C^∞ 級 n 次微分形式 ω が存在することが分かる．

向き付けられた Riemann 多様体に対しては, Riemann 計量を用いて体積要素を定めることができる．

(M, g) を向き付けられた n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体とし, M の各点 p に対して $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を T_pM の正の正規直交基底とする．すなわち, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は T_pM の内積 g_p に関する正規直交基底で, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を p を含む近傍で定義された局所座標系としたとき,

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)A$$

と表しておくと, $\det A > 0$ である．このとき,

$$\omega_p(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1$$

とおくと, ω_p は M の体積要素 ω を定める．この ω を (M, g) の体積要素または g の体積要素という．

上と同じ記号を用いて, g の体積要素を局所的に表してみよう．

まず, ω および行列式の定義より,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det A.$$

また,

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

とおくと,

$$(g_{ij}) = {}^t\!AA.$$

よって, $\det A > 0$ に注意すると,

$$\det A = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

したがって, g の体積要素 ω は

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と表すことができる．