§10. e 接続と m 接続

§9において扱ったように, 統計的モデルの α 接続は $\alpha = 0$ のときは Fisher 計量に関する Levi-Civita 接続であった. 一方, 統計的モデルの典型的な例として, 指数型分布族と混合型分布族というものが挙げられる. ここでは, それぞれの統計的モデルに対する α 接続が, $\alpha = 1$ あるいは $\alpha = -1$ のときにどのようなものになるかを調べよう.
まず, 指数型分布族について述べよう.

定義　Ω を高々可算集合または $\mathbf{R}^k$ とし, S を Ω 上の n 次元統計的モデルとする. S は Ω 上の実数値関数 $C, F_1, F_2, \dots, F_n$ および $\mathbf{R}^n$ の開集合 Θ 上の実数値関数 ψ を用いて,

$$S = \{p(x;\theta) | \theta \in \Theta\},$$

$$p(x;\theta) = \exp\left(C(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i F_i(x) - \psi(\theta)\right) \quad (\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)) \qquad (*)$$

と表されるとき, 指数型分布族という. このとき, θ を自然座標系という.

注意　上の定義において, $p(x;\theta)$ は確率関数または密度関数であるから,

$$\int_\Omega p(x;\theta)dx = 1$$

である. よって, ψ は

$$\psi(\theta) = \log \int_\Omega \exp\left(C(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i F_i(x)\right) dx$$

によりあたえられる.

§5において現れた統計的モデルの例はすべて指数型分布族であることが分かる. ここでは, 有限集合上の統計的モデルの場合について述べよう.

例　$(n+1)$ 個の元からなる有限集合

$$\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

上の n 次元統計的モデル S を

$$S = \{p(x;\xi) | \xi \in \Xi\},$$

$$\Xi = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n > 0,\ \sum_{i=1}^n \xi_i < 1 \right\},$$

$$p(x_i;\xi) = \begin{cases} \xi_i & (i = 1, 2, \dots, n), \\ 1 - \sum_{j=1}^n \xi_j & (i = 0) \end{cases}$$

により定める.
ここで,

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 & (x = x_i), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおく.

このとき,

$$
\begin{aligned}
\log p(x;\xi) &= \sum_{i=0}^{n} F_i(x)\log p(x_i;\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\log p(x_i;\xi) + \left(1-\sum_{i=1}^{n} F_i(x)\right)\log p(x_0;\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\log \frac{p(x_i;\xi)}{p(x_0;\xi)} + \log p(x_0;\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\log \frac{\xi_i}{1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j} + \log\left(1-\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right).
\end{aligned}
$$

よって,

$$
C(x) = 0 \quad (x\in\Omega),
$$

$$
\theta_i = \log\frac{\xi_i}{1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j} \quad (i=1,2,\ldots,n),
$$

$$
\psi(\theta) = \log\left(1+\sum_{i=1}^{n}\exp\theta_i\right)
$$

とおくと, S の元は $(*)$ のように表される.
したがって, S は指数型分布族である.

S を指数型分布族とし, S の元を $(*)$ のように表しておく.
このとき, §9 において扱ったように, α 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に対する Christoffel の記号は

$$
\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} = E_\theta\left[\left(\partial_i\partial_j l_\theta + \frac{1-\alpha}{2}\partial_i l_\theta \partial_j l_\theta\right)(\partial_k l_\theta)\right] \quad (i,j,k=1,2,\ldots,n)
$$

によりあたえられる. ただし,

$$
\partial_i = \frac{\partial}{\partial\theta_i},\ l_\theta = \log p(x;\theta)
$$

である.
ここで,

$$
\begin{aligned}
\partial_i l_\theta &= \partial_i\left(C(x)+\sum_{j=1}^{n}\theta_j F_j(x) - \psi(\theta)\right) \\
&= F_i(x) - \partial_i\psi(\theta).
\end{aligned}
$$

更に,

$$
\partial_i\partial_j l_\theta = -\partial_i\partial_j\psi(\theta).
$$

よって, $\alpha=1$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{ij,k} &= E_\theta\left[(-\partial_i\partial_j\psi(\theta))(\partial_k l_\theta)\right] \\
&= -\partial_i\partial_j\psi(\theta)E_\theta\left[\partial_k l_\theta\right] \\
&= -\partial_i\partial_j\psi(\theta)\int_\Omega \partial_k p(x;\theta)dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

一般に, アファイン接続をもつ多様体のある局所座標系に対して Christoffel の記号がすべて 0 となるとき, その局所座標系をアファイン座標系という. また, 各点の近傍でアファイン座標系が存在するとき, アファイン接続は平坦であるという. なお, アファイン接続が平坦であることとアファイン接続の捩率と曲率がともに 0 となることとは同値であることが知られている.
上の計算より, θ は $\nabla^{(1)}$ に関してアファイン座標系となり, $\nabla^{(1)}$ は平坦である.
このことから, $\nabla^{(1)}$ を指数型接続または e 接続という. また, $\nabla^{(1)}$ を $\nabla^{(e)}$ とも表す.
次に, 混合型分布族について述べよう.

定義　Ω を高々可算集合または $\mathbf{R}^k$ とし, S を Ω 上の n 次元統計的モデルとする. S は Ω 上の確率関数または密度関数 $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ を用いて,

$$S = \{p(x;\theta) | \theta \in \Theta\},$$

$$p(x;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i(x) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_i\right) p_0(x) \quad (\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)) \tag{$**$}$$

と表されるとき, 混合型分布族という. このとき, θ を混合座標系という.

例　上の 1 つめの例においても現れた有限集合上の統計的モデル S は混合型分布族でもある. 実際, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$p_i(x) = \begin{cases} 1 & (x = x_i), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ は Ω 上の確率関数で,

$$p(x;\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i(x) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) p_0(x)$$

と表されるからである.

S を混合型分布族とし, S の元を $(**)$ のように表しておく.
このとき,

$$\partial_i l_\theta = \frac{p_i(x) - p_0(x)}{p(x;\theta)}.$$

更に,

$$\partial_i \partial_j l_\theta = -\frac{(p_i(x) - p_0(x))(p_j(x) - p_0(x))}{(p(x;\theta))^2}.$$

よって, $\alpha = -1$ とすると,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,k}^{(-1)} &= E_\theta \left[(\partial_i \partial_j l_\theta + \partial_i l_\theta \partial_j l_\theta)(\partial_k l_\theta) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, θ は $\nabla^{(-1)}$ に関してアファイン座標系となり, $\nabla^{(-1)}$ は平坦である.
このことから, $\nabla^{(-1)}$ を混合型接続または m 接続という. また, $\nabla^{(-1)}$ を $\nabla^{(m)}$ とも表す.

関連事項 10. 局所対称アファイン接続

アファイン接続の平坦性は局所対称性というものへ一般化することができる.
まず, 関連事項 3 においても述べたアファイン変換を用いて, 点対称というものを考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とし, $p \in M$ とする. p のある近傍で定義されたアファイン変換 s_p は次の (1), (2) をみたすとき, p における点対称という.

$$(1)\ s_p(p) = p.$$
$$(2)\ (ds_p)_p = -1_{T_pM}.$$

そこで, M の各点において点対称が存在するとき, ∇ は局所対称であるという. また, 局所対称なアファイン接続をもつ多様体をアファイン局所対称空間という.
アファイン接続が局所対称であることとそのアファイン接続が捩れをもたず, 曲率が平行であることとは同値であることが分かる. すなわち, T, R をそれぞれ ∇ の捩率, 曲率とすると, ∇ が局所対称であることと $T = 0$ かつ $\nabla R = 0$ であることとは同値である. 特に, 平坦なアファイン接続は局所対称である.
また, M の各点において M 全体で定義された点対称が存在するとき, M をアファイン対称空間という.
§3 においても扱ったように, アファイン接続をもつ多様体に対しては測地線というものを考えることができる. ∇ に関する M 上の任意の測地線が $\mathbf{R}$ 全体で定義することができるとき, ∇ あるいは M は完備であるという. アファイン対称空間は完備である. 実際, 点対称を用いることにより, 測地線を $\mathbf{R}$ 全体で定義することができるからである. 逆に, 完備で単連結なアファイン局所対称空間はアファイン対称空間であることが分かる.
更に, M をアファイン対称空間とすると, M のアファイン変換群は M の上に推移的に作用することが分かる. よって, アファイン対称空間は等質空間というものになる.
Riemann 多様体に対して Levi-Civita 接続を考えたときのアファイン局所対称空間やアファイン対称空間はそれぞれ Riemann 局所対称空間, Riemann 対称空間という. Levi-Civita 接続は捩れをもたないから, Riemann 多様体が Riemann 局所対称空間であるためには Levi-Civita 接続の曲率が平行であればよい. また, Riemann 局所対称空間の点対称は等長的であることが分かる.
Riemann 対称空間の例を幾つか挙げよう.
まず, $\mathbf{R}^n$ を標準内積を用いることにより, Riemann 多様体とみなそう. このとき, $\mathbf{R}^n$ は Riemann 対称空間である. 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して, p における点対称 s_p は

$$s_p(x) = 2p - x \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

によりあたえられる.
次に, 原点中心, 半径 1 の n 次元球面 S^n を考えよう. S^n は Riemann 多様体 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体となるから, はめ込みによる誘導計量を考えることにより Riemann 多様体となる. このとき, S^n は Riemann 対称空間である. 各 $p \in S^n$ に対して, p における点対称 s_p は

$$s_p(x) = -x + 2\langle x, p\rangle p \quad (x \in S^n)$$

によりあたえられる. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準内積である.