§8. 群

ここでは, §5 でも述べた n 次直交行列全体の集合 $\mathrm{O}(n)$ に関する次の性質に注目しよう.

定理 8.1 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) 任意の $A, B \in \mathrm{O}(n)$ に対して, $AB \in \mathrm{O}(n)$ である.
(2) 任意の $A, B, C \in \mathrm{O}(n)$ に対して, $(AB)C = A(BC)$ である.
(3) E を n 次単位行列とすると, $E \in \mathrm{O}(n)$ で, 任意の $A \in \mathrm{O}(n)$ に対して, $AE = EA = A$ である.
(4) 任意の $A \in \mathrm{O}(n)$ に対して, $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ で, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ である.

数学で扱われる集合は単なるものの集まりではなく, 何らかの構造を兼ね備えたものであることが多い. 例えば, ベクトル空間は和とスカラー倍という演算をもつ集合である. 一方, $\mathrm{O}(n)$ は行列の積という演算をもち, 定理 8.1 で述べた性質をみたす. このような集合は次のように定式化される.

定義 8.1 G を空でない集合とする.
$a, b \in G$ に対して, $a * b \in G$ を対応させる $G \times G$ から G への写像 $* : G \times G \to G$ があたえられているとき, $*$ を G 上の二項演算, $a * b$ を a と b の積という. $a * b$ は ab とも表す.

$*$ を G 上の二項演算とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, 組 $(G, *)$ または G を群(ぐん)という.

(1) 任意の $a, b, c \in G$ に対して, $(ab)c = a(bc)$ である. (結合律)
(2) ある $e \in G$ が存在し, 任意の $a \in G$ に対して, $ae = ea = a$ である.
(3) 任意の $a \in G$ に対して, ある $a' \in G$ が存在し, $aa' = a'a = e$ である.

(2) の e を G の単位元という. また, (3) の a' を a^{-1} と表し, a の逆元という.

注意 8.1 定義 8.1 において, 結合律より, $(ab)c$ および $a(bc)$ はともに abc と表しても構わない.

例 8.1 (直交群) 定理 8.1 より, $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群となる. $\mathrm{O}(n)$ の単位元は E である. また, $A \in \mathrm{O}(n)$ の逆元は A の逆行列 A^{-1} である. $\mathrm{O}(n)$ を n 次直交群という.

例 8.2 (Euclid 空間の等長変換群) $\mathbf{R}^n$ の等長変換全体の集合 $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ に対する積の演算として写像の合成を考える. このとき, 定理 4.2 より, 定義 8.1 の (1) の条件がなりたつ. また, $\mathbf{R}^n$ 上の恒等写像 $1_{\mathbf{R}^n}$ を単位元とすることにより, 定義 8.1 の (2) の条件がなりたつ. 更に, $f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ の逆元を f の逆写像 f^{-1} とすることにより, 定義 8.1 の (3) の条件がなりたつ. よって, $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ は群となる. $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$ の等長変換群または合同変換群という.

群の基本的な性質を述べておこう.

定理 8.2 G を群とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) G の単位元は一意的である.
(2) 任意の $a \in G$ に対して, a の逆元は一意的である.

証明 (1): e, e' をともに G の単位元とする. このとき,

$$\begin{aligned} e' &= e'e \\ &= e, \end{aligned}$$

すなわち, $e' = e$ である. ただし, 最初の等号では e を G の単位元とみなし, 次の等号では e' を G の単位元とみなし, 定義 8.1 の (2) の条件を用いた. よって, G の単位元は一意的である.

(2): a', a'' をともに a の逆元とする．このとき, 定義 8.1 の (1)〜(3) の条件より,

$$\begin{aligned} a'' &= ea'' \\ &= (a'a)a'' \\ &= a'(aa'') \\ &= a'e \\ &= a', \end{aligned}$$

すなわち, $a'' = a'$ である．よって, a の逆元は一意的である． □

定理 8.3 G を群とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $a \in G$ とすると, $(a^{-1})^{-1} = a$ である.
(2) $a, b \in G$ とすると, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ である.

証明 (1): 定義 8.1 の (3) の条件より,

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

である．よって, $(a^{-1})^{-1} = a$ である.
(2): 定義 8.1 の (1)〜(3) の条件より,

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= aea^{-1} \\ &= (ae)a^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e, \end{aligned}$$

すなわち,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$$

である．同様に,

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$$

である．よって, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ である． □

群に関する基本的な概念を定めておこう.

定義 8.2 G を群とする.
G が有限集合のとき, G を有限群という．このとき, G の元の個数を G の位数という．また, G が無限集合のとき, G を無限群という．このとき, G の位数は無限であるという.
G が交換律をみたすとき, すなわち, 任意の $a, b \in G$ に対して,

$$ab = ba$$

であるとき, G を可換群または Abel 群という.

注意 8.2 G を Able 群とする．このとき, G の積の演算を表す記号として, $+$ を用いることもあるが, このような G を加法群ともいう．G が加法群のとき, G の単位元は 0 と表し, $a \in G$ の逆元は $-a$ と表す．一方, G の積の演算を表す記号をそのまま用いる場合は, G を乗法群ともいう.

例 8.1, 例 8.2 に続いて, 群の例として, 自明なものや数の集合からなるものを挙げよう.

例 8.3 (単位群) 定義 8.1 の (2) の条件より, 群は単位元を必ず含むが, 逆に, 単位元のみからなる群 $\{e\}$ を考えることができる. 群 $\{e\}$ を単位群という. 単位群は位数が 1 の Abel 群である.

例 8.4 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ は通常の和に関して加法群となる. また, これらは無限群である.

例 8.5 $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ は通常の積に関して乗法群となる. これらの乗法群の単位元は 1 であり, 元 a の逆元は a の逆数 a^{-1} である. また, これらは無限群である.

その他に, 線形代数にも現れる群の例を挙げておこう.

例 8.6 (実一般線形群) 正則な n 次実行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ と表す. このとき, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ は行列の積に関して群となる. $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ の単位元は n 次単位行列 E である. また, $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ の逆元は A の逆行列 A^{-1} である. $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ を n 次実一般線形群という. $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ は無限群である.

なお, $\mathrm{GL}(1,\mathbf{R})$ は例 8.5 の乗法群 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ に他ならない. また, $n\geq 2$ のとき, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ は Abel 群ではない.

例 8.7 (対称群) $n\in\mathbf{N}$ に対して, n 文字の置換全体の集合を S_n と表す. すなわち, 集合 X_n を

$$X_n=\{1,2,\ldots,n\}$$

により定めると, S_n は X_n から X_n への全単射全体の集合である. このとき, S_n は写像の合成に関して群となる. S_n の単位元は恒等置換, すなわち, X_n 上の恒等写像である. また, $\sigma\in S_n$ の逆元は σ の逆置換 σ^{-1} である. S_n を n 次対称群という. S_n は位数 $n!$ の有限群である.

なお, $n=1,2$ のとき, S_n は Abel 群である. しかし, $n\geq 3$ のとき, S_n は Abel 群ではない.

例 8.8 (ベクトル空間) V をベクトル空間とする. このとき, V は和に関して加法群となる. V の単位元は零ベクトルである. また, $x\in V$ の逆元は x の逆ベクトル $-x$ である.

群の部分集合を考える際には, 単なる部分集合ではなく, 次に定めるようなそれ自身が群となるようなものを考えることが多い.

定義 8.3 G を群, H を G の部分集合とする. H が G の積により, 群となるとき, H を G の部分群という. ただし, H の単位元は G の単位元 e で, H の元としての $a\in H$ の逆元は G の元としての a の逆元 a^{-1} であるとする.

例 8.9 (自明な部分群) G を群とする. このとき, 単位群および G 自身は明らかに G の部分群である. これらを自明な部分群という.

例 8.10 例 8.4 で述べた加法群 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ を考える. このとき, $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ の部分群である. また, $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ の部分群である. 更に, $\mathbf{R}$ は $\mathbf{C}$ の部分群である.

例 8.11 例 8.5 で述べた乗法群 $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ を考える. このとき, $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ は $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ の部分群である. また, $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ は $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ の部分群である.

例 8.12 $\mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ の部分群である. また, $\mathrm{SO}(n)$ は $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ の部分群である. $\mathrm{SO}(n)$ を n 次特殊直交群または回転群という.

例 8.13 (交代群) n 文字の置換で, 偶置換となるもの全体の集合を A_n と表す. このとき, A_n は S_n の部分群である. A_n を n 次の交代群という.

例 8.14 (ベクトル空間の部分空間) V をベクトル空間, W を V の部分空間とする. このとき, V を例 8.8 で述べたように加法群とみなすと, W は V の部分群である.

問題 8

1. 行列式が 1 の n 次実行列全体の集合を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ と表す. $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群となることを示せ. なお, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実特殊線形群という. また, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の部分群, $\mathrm{SO}(n)$ は $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の部分群でもある.

2. G, H を群とし, $(a, b), (a', b') \in G \times H$ に対して, (a, b) と (a', b') の積 $(a, b)(a', b') \in G \times H$ を

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

により定める. このとき, $G \times H$ は群となることを示せ. 群 $G \times H$ を G と H の直積群という.

3. G を群とする. H および K が G の部分群ならば, $H \cap K$ は G の部分群であることを示せ.

4. G を群, H を G の空でない部分集合とする. 任意の $a, b \in H$ に対して, $ab^{-1} \in H$ ならば, H は G の部分群であることを示せ. なお, 逆がなりたつことも分かる.

問題 8 の解答

1. まず, $A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ とすると, 行列式の性質および $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の定義より,

$$\begin{aligned} |AB| &= |A||B| \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

すなわち, $|AB| = 1$ である. よって, $AB \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ である.

次に, $A, B, C \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ とすると, $(AB)C = A(BC)$ である. よって, 定義 8.1 の (1) の条件がなりたつ.

更に, E を n 次単位行列とすると, $|E| = 1$ だから, $E \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ で, 任意の $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ に対して,

$$AE = EA = A$$

である. よって, 定義 8.1 の (2) の条件がなりたつ.

最後に, $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ とすると, 行列式の性質および $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の定義より,

$$\begin{aligned} |A^{-1}| &= |A|^{-1} \\ &= 1^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

すなわち, $|A^{-1}| = 1$ である. よって, $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ で,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

となり, 定義 8.1 の (3) の条件がなりたつ.

したがって, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群となる.

2. まず, $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in G \times H$ とする. このとき, G, H は群だから,

$$\begin{aligned} ((a, b)(a', b'))(a'', b'') &= ((aa', bb')(a'', b'') \\ &= ((aa')a'', (bb')b'') \\ &= (a(a'a''), b(b'b'')) \\ &= (a, b)(a'a'', b'b'') \\ &= (a, b)((a', b')(a'', b'')), \end{aligned}$$

すなわち,

$$((a, b)(a', b'))(a'', b'') = (a, b)((a', b')(a'', b''))$$

である. よって, 定義 8.1 の (1) の条件がなりたつ.

次に, e, e' をそれぞれ G, H の単位元とする. このとき, 任意の $(a, b), (a', b') \in G \times H$ に対して,

$$\begin{aligned} (a, b)(e, e') &= (ae, be') \\ &= (a, b), \end{aligned}$$

すなわち,

$$(a,b)(e,e') = (a,b)$$

である. 同様に,

$$(e,e')(a,b) = (a,b)$$

である. よって, 定義 8.1 の (2) の条件がなりたつ.

更に, $(a,b) \in G \times H$ とすると,

$$\begin{aligned}(a,b)(a^{-1},b^{-1}) &= (aa^{-1},bb^{-1}) \\ &= (e,e'),\end{aligned}$$

すなわち,

$$(a,b)(a^{-1},b^{-1}) = (e,e')$$

である. 同様に,

$$(a^{-1},b^{-1})(a,b) = (e,e')$$

である. よって, 定義 8.1 の (3) の条件がなりたつ.

したがって, $G \times H$ は群となる.

3. まず, e を G の単位元とする. このとき, H, K は G の部分群だから, $e \in H \cap K$ である. 特に, $H \cap K$ は空ではない.

次に, $a, b \in H \cap K$ とする. このとき, $a, b \in H$ で, H は G の部分群だから, $ab \in H$ である. 同様に, $ab \in K$ である. よって, $ab \in H \cap K$ である.

また, $a, b, c \in H \cap K$ とする. このとき, $a, b, c \in G$ で, G は群だから, $(ab)c = a(bc)$ である. よって, 定義 8.1 の (1) の条件がなりたつ.

更に, 任意の $a \in H \cap K$ に対して,

$$ae = ea = a$$

である. よって, 定義 8.1 の (2) の条件がなりたつ.

最後に, $a \in H \cap K$ とする. このとき, $a \in H$ で, H は G の部分群だから, $a^{-1} \in H$ である. 同様に, $a^{-1} \in K$ である. よって, $a^{-1} \in H \cap K$ で,

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

となり, 定義 8.1 の (3) の条件がなりたつ.

したがって, $H \cap K$ は G の部分群である.

4. まず, 定義 8.1 の (1) の条件はなりたつ. 次に, $a \in H$ とする. 仮定より,

$$e = aa^{-1} \in H,$$

すなわち, $e \in H$ となり, 定義 8.1 の (2) の条件がなりたつ. よって, 仮定より,

$$a^{-1} = ea^{-1} \in H,$$

すなわち, $a^{-1} \in H$ となり, 定義 8.1 の (3) の条件がなりたつ. 更に, $b \in H$ とする. このとき, $b^{-1} \in H$ だから, 仮定より,

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H,$$

すなわち, $ab \in H$ となる. したがって, H は G の部分群である.