

§11. 2次超曲面

実数を係数とする未知変数 x についての 2 次方程式は

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

と表すことができる。ただし、 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ である。 $b^2 - ac < 0$ のとき、上の方程式の解は複素数の範囲で考えなければ存在しないが、 $b^2 - ac \geq 0$ のとき、上の方程式の実数解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

と具体的に求めることができる。しかし、未知変数の個数が増えると、2次方程式の解を具体的に表すことはできなくなってしまう。ここでは、未知変数が n 個の 2 次方程式を \mathbf{R}^n 内の図形とみなすことによって調べていこう。

実数を係数とする未知変数 x_1, x_2, \dots, x_n についての 2 次方程式は

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \cdots + 2b_nx_n + c = 0$$

と表すことができる。ただし、

$$a_{ij}, b_i, c \in \mathbf{R}, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

で、 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ の内の少なくとも 1 つは 0 ではない。 $x_i x_j$ と $x_j x_i$ は同類項なので、上の第 2 式のように仮定してもよいことに注意しよう。このとき、 $A \in \mathrm{Sym}(n)$ および $b, x \in \mathbf{R}^n$ を

$$A = (a_{ij}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

により定めることができる。また、 A は零行列ではない、すなわち、 $A \neq O$ である。よって、上の 2 次方程式は行列の積を用いて、

$${}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \tag{1}$$

と表すことができる。そこで、(1) をみたす $x \in \mathbf{R}^n$ 全体の集合を考えよう。すなわち、

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0\}$$

である。これを 2 次超曲面という。また、2 次方程式 (1) 自身のことも 2 次超曲面という。なお、2 次超曲面は $n = 2$ のときは 2 次曲線、 $n = 3$ のときは 2 次曲面という。

例 11.1 (橢円) $a, b > 0$ とする。このとき、未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は橢円を表す 2 次曲線である。

例 11.2 (双曲線) $a, b > 0$ とする。このとき、未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は双曲線を表す 2 次曲線である。

例 11.3 (放物線) $a > 0$ とする。このとき、未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$x^2 = 2ay$$

は放物線を表す 2 次曲線である。

例 11.4 (球面) $r > 0$ とする。このとき、未知変数 x, y, z についての 2 次方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

は球面を表す 2 次曲面である。

さて、§6 で述べたように、 \mathbf{R}^n に対しては等長変換という Euclid 距離を保つ全単射を考えることができるのであった。まず、次がなりたつ。

定理 11.1 \mathbf{R}^n の等長変換は \mathbf{R}^n 内の 2 次超曲面を \mathbf{R}^n 内の 2 次超曲面へ写す。

証明 \mathbf{R}^n の等長変換が行列を用いて表されることから、ほとんど明らかであるが、後のために具体的に計算しておくことにする。

$f \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とする。このとき、 $f^{-1} \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ で、 $x \in \mathbf{R}^n$ に対して、 $y = f(x)$ とおくと、 $x = f^{-1}(y)$ である。これを (1) に代入すると、

$${}^t(f^{-1}(y))A f^{-1}(y) + 2^t b f^{-1}(y) + c = 0$$

である。ここで、定理 6.2 より、ある $P \in \text{O}(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し、

$$f^{-1}(y) = Py + q$$

である。これを上の式に代入すると、

$${}^t(Py + q)A(Py + q) + 2^t b(Py + q) + c = 0$$

である。更に、 ${}^t A = A$ であることと 1 次行列は転置を取っても変わらないことに注意すると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= ({}^t y {}^t P + {}^t q)(APy + Aq) + 2^t bPy + 2^t bq + c \\ &= {}^t y({}^t PAP)y + {}^t y {}^t PAq + {}^t qAPy + {}^t qAq + 2^t bPy + 2^t bq + c \\ &= {}^t y({}^t PAP)y + {}^t ({}^t y {}^t PAq) + {}^t qAPy + {}^t qAq + 2^t bPy + 2^t bq + c \\ &= {}^t y({}^t PAP)y + 2^t qAPy + 2^t bPy + {}^t qAq + 2^t bq + c \\ &= {}^t y({}^t PAP)y + 2^t (Aq + b)Py + {}^t qAq + 2^t bq + c \end{aligned}$$

だから、

$${}^t y({}^t PAP)y + 2^t (Aq + b)Py + {}^t qAq + 2^t bq + c = 0 \quad (2)$$

である。このとき、 P は正則で、 $A \in \text{Sym}(n)$ 、 $A \neq O$ だから、 ${}^t PAP \in \text{Sym}(n)$ 、 ${}^t PAP \neq O$ で、(2) は 2 次超曲面を表す。よって、 \mathbf{R}^n の等長変換は \mathbf{R}^n 内の 2 次超曲面を \mathbf{R}^n 内の 2 次超曲面へ写す。□

1 変数の 2 次方程式とは異なり、2 変数以上の 2 次方程式については、(1) がどのような \mathbf{R}^n の部分集合を表すのかは一般には判別し難い。そこで、Euclid 空間の等長変換で写り合う 2 次超曲面は同じものであるとみなして、(1) を例 11.1～例 11.4 で表したような理解しやすい形に変形

することを考えよう。なお、§7で述べたことより、2次超曲面を Euclid 空間の等長変換で写すとは、回転、鏡映、平行移動といった操作を何回か施すことを意味する。また、このことは群の作用として次のように述べることができる。

定理 11.2 集合 X を

$$X = \{\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \mid \Phi \text{ は成分の } 2\text{ 次多項式で表される}\}$$

により定め、 $(f, \Phi) \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n) \times X$ に対して、

$$(f\Phi)(x) = \Phi(f^{-1}(x)) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

とおく。このとき、 (f, Φ) から $f\Phi$ への対応は $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ の X への左からの作用を定める。

証明 まず、定理 11.1 の証明より、 $f\Phi \in X$ である。

更に、 $g \in \text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とすると、

$$\begin{aligned} (f(g\Phi))(x) &= (g\Phi)(f^{-1}(x)) \\ &= \Phi(g^{-1}(f^{-1}(x))) \\ &= \Phi((g^{-1} \circ f^{-1})(x)) \\ &= \Phi((f \circ g)^{-1}(x)) \\ &= ((f \circ g)\Phi)(x), \end{aligned}$$

すなわち、

$$(f(g\Phi))(x) = ((f \circ g)\Phi)(x)$$

である。よって、

$$f(g\Phi) = (f \circ g)\Phi$$

だから、定義 10.1 の (1) の条件がなりたつ。

また、

$$\begin{aligned} (1_{\mathbf{R}^n}\Phi)(x) &= \Phi(1_{\mathbf{R}^n}^{-1}(x)) \\ &= \Phi(x), \end{aligned}$$

すなわち、

$$(1_{\mathbf{R}^n}\Phi)(x) = \Phi(x)$$

である。よって、

$$1_{\mathbf{R}^n}\Phi = \Phi$$

だから、定義 10.1 の (2) の条件がなりたつ。

したがって、 (f, Φ) から $f\Phi$ への対応は $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ の X への左からの作用を定める。□

更に、(1)を理解しやすい形に変形するという問題は、定理 11.2 のように群の作用の立場から捉えると、各軌道の中から理解しやすい代表を選ぶことであることができる。

問題 11

1. 2 次超曲面

$${}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \quad (*)$$

を考える. ただし, $A \in \text{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ である.

(1) A が正則ならば, ある $P \in O(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し,

$$x = Py + q$$

とおくと, $(*)$ は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0$$

と表されることを示せ. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は重複度も含めた A の固有値で,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

である.

(2) $n = 2$ のとき, $(*)$ が楕円を表すための条件を (1) の $\lambda_1, \lambda_2, |A|, |\tilde{A}|$ を用いて表せ.

(3) $n = 2$ のとき, $(*)$ が双曲線を表すための条件を (1) の $\lambda_1, \lambda_2, |A|, |\tilde{A}|$ を用いて表せ.

(4) $n = 3$ のとき, $(*)$ が球面を表すための条件を (1) の $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, |A|, |\tilde{A}|$ を用いて表せ.

問題 11 の解答

1. (1) $P \in O(n)$, $q \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$x = Py + q$$

とおき, これを (*) に代入すると, 定理 11.1 の証明の計算より,

$${}^t y ({}^t PAP)y + 2^t(Aq + b)Py + {}^t q Aq + 2^t bq + c = 0 \quad (\text{a})$$

である.

仮定より, A は正則だから, A^{-1} が存在し, $q = -A^{-1}b$ とすると,

$$Aq + b = 0 \quad (\text{b})$$

である. 更に, 対称行列は直交行列によって対角化可能だから, P を

$${}^t PAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるように選んでおくことができる. このとき, (a) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + {}^t q Aq + 2^t bq + c = 0 \quad (\text{c})$$

となる. ここで, (b) より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & Aq + b \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix}$$

である. よって, 両辺の行列式を取ると, 行列式の性質より,

$$|\tilde{A}| = |A|({}^t bq + c)$$

である. 更に, A は正則だから, $|A| \neq 0$ で,

$${}^t bq + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|} \quad (\text{d})$$

である. したがって, $A \in \text{Sym}(n)$ であることと (b), (d) より,

$$\begin{aligned} {}^t q Aq + 2^t bq + c &= {}^t (Aq)q + 2^t bq + c \\ &= {}^t (-b)q + 2^t bq + c \\ &= {}^t bq + c \\ &= \frac{|\tilde{A}|}{|A|}, \end{aligned}$$

すなわち,

$${}^t q A q + 2 {}^t b q + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$$

である. これを (c) に代入すると,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 \quad (\text{e})$$

となる.

(2) (e)において, $n = 2$ とすると,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 \quad (\text{f})$$

である. (f) を橢円を表す方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

と比べると, 求める条件は $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\frac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0$ または $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\frac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0$ である.

(3) (f) を双曲線を表す方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

と比べると, 求める条件は $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $\frac{|\tilde{A}|}{|A|} \neq 0$ である.

(4) (e)において, $n = 3$ とすると,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0$$

である. これを球面を表す方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

と比べると, 求める条件は

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0, \quad \frac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0$$

または

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < 0, \quad \frac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0$$

である.