§1. ベクトル値関数

以下では, n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の元は n 個の実数を横に並べたものとして表すことにする. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である.
微分積分に現れる関数は主に $\mathbf{R}$ に値をとる関数であった. 簡単のため, 以下では 1 変数の場合を扱うことにしよう. すると, $\mathbf{R}$ に値をとる関数とは区間から $\mathbf{R}$ への写像のことである. ここでは, n を 2 以上の自然数とし, 区間から $\mathbf{R}^n$ への写像, すなわちベクトル値関数を考えよう. なお, ベクトル値関数に対して, $\mathbf{R}$ に値をとる関数をスカラー値関数ともいう.
f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \quad (t \in I) \tag{$*$}$$

と表すことができる.
g も I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であるから, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $f + g$ を

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \ldots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.
また, c を I で定義されたスカラー値関数とすると, $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = c(t)f(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \ldots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.
更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積を用いると, I で定義されたスカラー値関数 $\langle f, g\rangle$ を

$$\langle f, g\rangle(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\,{}^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.
また, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.
$\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数に対しては外積というものを考えることができる.
まず, $\mathbf{R}^3$ の外積について述べよう.
$a, b \in \mathbf{R}^3$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする. このとき, a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルで, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定められる.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向き.
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

e_1, e_2, e_3 を $\mathbf{R}^3$ の基本ベクトルとする．すなわち，

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

である．よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと，

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$**$}$$

がなりたつ．

定理　$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とすると，次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると，$(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

$a, b \in \mathbf{R}^3$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表すことができる．このとき，上の定理と $(**)$ より，

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

さて，f, g を区間 I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数としよう．このとき，I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる．
再び，f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数としよう．
f が $(*)$ のように表されているとき，各 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が I で微分可能ならば，f は I で微分可能であるという．このとき，I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)) \quad (t \in I)$$

により定め，f' を f の微分という．このように，ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよいのである．

定理　f, g を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると，次の (1)〜(4) がなりたつ．
(1) $(f + g)' = f' + g'$.
(2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると，$(cf)' = c'f + cf'$.
(3) $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.
(4) $n = 3$ のとき，$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

証明　(1): 成分毎に考え，微分の線形性を用いればよい．
(2): 成分毎に考え，積の微分法を用いればよい．
(3): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)),\ g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))\ (t \in I)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle'(t) &= \langle f(t),g(t)\rangle' \\
&= (f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+\cdots+f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1(t)g_1(t))'+(f_2(t)g_2(t))'+\cdots+(f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1'(t)g_1(t)+f_1(t)g_1'(t))+(f_2'(t)g_2(t)+f_2(t)g_2'(t))+\cdots+(f_n'(t)g_n(t)+f_n(t)g_n'(t)) \\
&= f_1'(t)g_1(t)+f_2'(t)g_2(t)+\cdots+f_n'(t)g_n(t)+f_1(t)g_1'(t)+f_2(t)g_2'(t)+\cdots+f_n(t)g_n'(t) \\
&= \langle f'(t),g(t)\rangle+\langle f(t),g'(t)\rangle \\
&= \langle f',g\rangle(t)+\langle f,g'\rangle(t) \\
&= (\langle f',g\rangle+\langle f,g'\rangle)(t).
\end{aligned}$$

よって,

$$\langle f,g\rangle' = \langle f',g\rangle+\langle f,g'\rangle.$$

(4): 成分毎に考えればよい. □

ベクトル値関数の積分についても考えよう.
f を閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t)) \quad (t\in[a,b])$$

と表しておく.
各 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ が $[a,b]$ で積分可能なとき, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\in\mathbf{R}^n$ を

$$\int_a^b f(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt,\int_a^b f_2(t)dt,\ldots,\int_a^b f_n(t)dt\right)$$

により定め, これを f の $[a,b]$ における定積分という. このとき, f は $[a,b]$ で積分可能であるという.
スカラー値関数の定積分の線形性はベクトル値関数の場合にも同様になりたつ.

定理 f,g を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt.$
(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int_a^b (cf)(t)dt=c\int_a^b f(t)dt.$

f を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 F を

$$F(t)=\int_a^t f(s)ds \quad (t\in[a,b])$$

により定める. これを f の不定積分という.
微分積分学の基本定理より,

$$F'(t)=f(t) \quad (t\in[a,b])$$

がなりたつ. 更に,

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

がなりたつ.

問題 1

1. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2),\ g(t) = (t^3, t^4)\ (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $\langle f, g' \rangle$ を求めよ.
(2) $\displaystyle\int_0^1 \|f\|(t)dt$ を求めよ.
(3) $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(t)dt$ を求めよ.

2. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $f \times f'$ を求めよ.
(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ.

3. f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ.

4. f を区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ.

5. f を区間 I で定義された 2 回微分可能な $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. I で定義されたスカラー値関数 $c(t)$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち t に依存しないベクトルであることを示せ.

問題 1 の解答

1. (1) まず,

$$g'(t) = (3t^2, 4t^3).$$

よって,

$$\begin{aligned}\langle f, g'\rangle(t) &= \langle f(t), g'(t)\rangle \\ &= \langle (t, t^2), (3t^2, 4t^3)\rangle \\ &= t \cdot 3t^2 + t^2 \cdot 4t^3 \\ &= 3t^3 + 4t^5.\end{aligned}$$

(2) $t \in [0, 1]$ のとき,

$$\begin{aligned}\|f\|(t) &= \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1 + t^2}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|f\|(t)dt &= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.\end{aligned}$$

(3) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f+g)(t)dt &= \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= \left(\int_0^1 tdt, \int_0^1 t^2dt\right) + \left(\int_0^1 t^3dt, \int_0^1 t^4dt\right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1, \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right) + \left(\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1, \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{15}\right).\end{aligned}$$

2. (1) まず,

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

よって,

$$\begin{aligned}(f \times f')(t) &= (t, t^2, t^3) \times (1, 2t, 3t^2) \\ &= (t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t, t^3 \cdot 1 - t \cdot 3t^2, t \cdot 2t - t^2 \cdot 1) \\ &= (t^4, -2t^3, t^2).\end{aligned}$$

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} f''(t) &= (1', (2t)', (3t^2)') \\ &= (0, 2, 6t). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle f \times f', f'' \rangle(t) &= \langle (t^4, -2t^3, t^2), (0, 2, 6t) \rangle \\ &= t^4 \cdot 0 + (-2t^3) \cdot 2 + t^2 \cdot 6t \\ &= 2t^3. \end{aligned}$$

3. まず,

$$\begin{aligned} \left(\|f\|^2\right)' &= \langle f, f \rangle' \\ &= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\ &= 2\langle f, f' \rangle. \end{aligned}$$

仮定より, $\|f\|^2$ は $t = t_0$ で最大または最小となるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \|f\|^2 \\ &= 2\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle = 0.$$

すなわち, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する.

4. まず, $\|f\|$ が定数関数であると仮定すると, $\|f\|^2$ も定数関数.
よって,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\|f\|^2\right)' \\ &= 2\langle f, f' \rangle. \end{aligned}$$

したがって, 任意の $t \in I$ に対して

$$\langle f(t), f'(t) \rangle = 0.$$

すなわち, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交する.
上の計算は逆に辿ることもできるから, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交すると仮定すると, $\|f\|$ は定数関数.

5. 仮定より,

$$\begin{aligned} (f \times f')' &= f' \times f' + f \times f'' \\ &= 0 + f \times (cf) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $f \times f'$ の各成分は定数となるから, $f \times f'$ は定ベクトル.