§4. 解の存在と一意性

微分方程式はいつでも解が具体的に求められるとは限らないし, そもそも解が存在しない場合もある. ここでは正規形の微分方程式を考え, 初期値問題の解の存在と一意性について述べよう.
$t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $r, R > 0$ とし, $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$D = \{(t,x) | t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^n,\ |t - t_0| \leq r,\ \|x - x_0\| \leq R\}$$

により定める. $f(t,x)$ を D で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数とし, 微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える. 初期値問題とは第 1 式の微分方程式に, 更に第 2 式の条件を付け加えたものである. この第 2 式を初期条件という.
初期値問題 $(*)$ の解の存在については次が最も基本的である.

Cauchy-Peano の存在定理　f が D で連続ならば,

$$M = \max_{(t,x) \in D} \|f(t,x)\|,\ \delta = \min\left\{r, \frac{R}{M}\right\}$$

とおくと, 閉区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で定義された $(*)$ の解が存在する.

上の定理における解を局所解という. これに対して区間 $[t_0 - r, t_0 + r]$ で定義された解を大域解という.
解の一意性も保証する定理については次が基本的である.

Picard-Lindelöf の定理　f が D で連続で, 更にある定数 L が存在し, 任意の $(t,x), (t,y) \in D$ に対して

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

がなりたつならば, $(*)$ の局所解が一意的に存在する.

上の定理の不等式を Lipschitz 条件, L を Lipschitz 定数という.
更に, 次のような線形微分方程式の場合について述べよう.

定理　I を区間, A を I で連続な n 次実正方行列に値をとる関数, b を I で連続な $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数とし, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき, 初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xA(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の大域解, すなわち I で定義された解が一意的に存在する.

解の存在と一意性に関連する例を幾つか挙げよう.

例　初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = tx, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える.

$(t,x)=(0,1)$ の近くで関数 tx は Lipschitz 条件をみたすから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する. また, この微分方程式は線形でもある.
$t=0$ の近くで $x(t)$ は 1 に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)}\frac{dx}{x}=\int_0^t tdt.$$

よって,

$$[\log x]_1^{x(t)}=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t.$$

したがって,

$$\log x(t)=\frac{1}{2}t^2.$$

すなわち,

$$x(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

特に, 関数 tx の定義域をどのように考えても, $x(t)$ は大域解である.

次の例に見られるように, $(*)$ における $f(t,x)$ の定義域 D によっては局所解は存在しても大域解は存在しない場合がある.

例 (解の爆発)
$a>0$ とし, 初期値問題

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2,\\ x(0)=a\end{cases}$$

を考える.
$(t,x)=(0,a)$ の近くで関数 x^2 は Lipschitz 条件をみたすから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する.
$t=0$ の近くで $x(t)$ は a に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)}\frac{dx}{x^2}=\int_0^t dt.$$

よって,

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{x(t)}=[t]_0^t.$$

したがって,

$$-\frac{1}{x(t)}+\frac{1}{a}=t.$$

すなわち,

$$x(t)=\left(\frac{1}{a}-t\right)^{-1}.$$

特に, $x(t)$ は区間 $[0,\frac{1}{a})$ で定義されるが,

$$\lim_{t\to\frac{1}{a}-0}x(t)=+\infty$$

である. このようなとき, 解は爆発するという.

次は解の一意性がなりたたない例を挙げよう.

例　初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

を考える.
$(t, x) = (0, 0)$ の近くで関数 $\sqrt{|x|}$ は連続だから, 解 $x(t)$ は存在する.
まず, $x(t) = 0$ は解.
また,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x}} = \pm 2\sqrt{\pm x} \quad (\text{複号同順})$$

だから,

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}t^2 & (t \leq 0), \\ \dfrac{1}{4}t^2 & (t > 0) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解.
更に, $t_1 \leq 0 \leq t_2$ とし,

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}(t - t_1)^2 & (t \leq t_1), \\ 0 & (t_1 < t \leq t_2), \\ \dfrac{1}{4}(t - t_2)^2 & (t > t_2) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解.

3 つめに述べた定理, すなわち線形微分方程式の解の存在と一意性を用いて, 指数関数や三角関数を定義することができる.

例 (指数関数)
初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える.
線形微分方程式の解の存在と一意性より, $\mathbf{R}$ 全体で定義された解 $x(t)$ が一意的に存在する. この解が指数関数 e^t である.

例 (三角関数)
初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

を考える.
線形微分方程式の解の存在と一意性より, $\mathbf{R}$ 全体で定義された解 $(x(t), y(t))$ が一意的に存在する. この解が三角関数の組 $(\cos t, \sin t)$ である.

問題 4

1. $t_0, x_0 \in \mathbf{R}$, $r, R > 0$ とし, $D \subset \mathbf{R}^2$ を

$$D = \{(t,x) | t, x \in \mathbf{R},\ |t - t_0| \leq r,\ |x - x_0| \leq R\}$$

により定める. D で定義された関数 $f(t,x)$ が x に関して連続微分可能, すなわち D で定義された偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が存在し, 更に $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が D で連続であるとする. このとき, $f(t,x)$ は Lipschitz 条件をみたすことを示せ.

2. 微分方程式の解の一意性を用いることにより, 指数法則

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

を示せ.

3. 微分方程式の解の一意性を用いることにより, 三角関数に対する加法公式

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

を示せ.

4. 双曲線関数 $\cosh t$ および $\sinh t$ を線形微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1,0) \end{cases}$$

の解 $(x(t), y(t))$ を用いて,

$$x(t) = \cosh t,\ y(t) = \sinh t$$

により定める.
微分方程式の解の一意性を用いることにより, 等式

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

を示せ.

問題 4 の解答

1. 仮定より, 関数 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ は D で連続.

Euclid 空間の有界閉集合で定義された連続関数は最大値をもつから, 定数

$$L = \max_{(t,x)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$$

が存在する.

$(t,x_1),(t,x_2)\in D$ とすると,

$$\begin{aligned} f(t,x_1)-f(t,x_2) &= [f(t,x_2+s(x_1-x_2))]_{s=0}^{s=1} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(t,x_2+s(x_1-x_2))ds \\ &= (x_1-x_2)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2+s(x_1-x_2))ds. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} |f(t,x_1)-f(t,x_2)| &= |x_1-x_2|\left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2+s(x_1-x_2))ds\right| \\ &\le |x_1-x_2|\int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2+s(x_1-x_2))\right| ds \\ &\le |x_1-x_2|\int_0^1 L ds \\ &\le L|x_1-x_2|. \end{aligned}$$

したがって, $f(t,x)$ は Lipschitz 条件をみたす.

2. 初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = e^{\beta} \end{cases}$$

を考える.

このとき, $e^{t+\beta}$ および e^te^β はともに解.

よって, 微分方程式の解の一意性より,

$$e^{t+\beta} = e^te^\beta.$$

$t=\alpha$ とおくと,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

3. 初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0),y(0)) = (\cos\beta,\sin\beta) \end{cases}$$

を考える.

まず,

$$\frac{d}{dt}(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta)) = (-\sin(t+\beta), \cos(t+\beta))$$
$$= (\cos(t+\beta), \sin(t+\beta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また,

$$\frac{d}{dt}(\cos t \cos\beta - \sin t \sin\beta, \sin t \cos\beta + \cos t \sin\beta)$$
$$= (-\sin t \cos\beta - \cos t \sin\beta, \cos t \cos\beta - \sin t \sin\beta)$$
$$= (\cos t \cos\beta - \sin t \sin\beta, \sin t \cos\beta + \cos t \sin\beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

更に,

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0.$$

よって, $(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta))$ および $(\cos t \cos\beta - \sin t \sin\beta, \sin t \cos\beta + \cos t \sin\beta)$ はともに上の初期値問題の解.
したがって, 微分方程式の解の一意性より,

$$(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta)) = (\cos t \cos\beta - \sin t \sin\beta, \sin t \cos\beta + \cos t \sin\beta).$$

$t = \alpha$ とおくと,

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

4. 関数 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ を

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \tilde{y}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

により定めると,

$$\frac{d}{dt}(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$$
$$= (\tilde{y}(t), \tilde{x}(t))$$
$$= (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また,

$$(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 0).$$

よって, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ もあたえられた初期値問題の解.
したがって, 微分方程式の解の一意性より,

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$