§1. 集合

集合は現代数学において必要不可欠な概念である．まず, 集合とはものの集まりのことである．ただし, ものの集まりといっても数学では集められるものがはっきりと定まる必要がある．

例 1.1　自然数全体の集まりは集合である．自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ と表す．これに対して, 例えば, かなり大きい自然数全体の集まりは集合とはいわない．「かなり大きい」という言葉の意味が数学的には曖昧ではっきりしないからである．

注意 1.1　「**例 1.1**」のような太文字を黒板やノートなどに手で書くときは, 「例 1.1」のように下線を用いる．また, $\mathbf{N}$ は N の太文字であるが, これを手で書くときは, 「$\mathbb{N}$」のように原則として文字の左側を二重にする．

$\mathbf{N}$ 以外にも数学でよく現れる, 数(すう)からなる集合を挙げておこう．

例 1.2　整数全体の集合, 有理数全体の集合, 実数全体の集合, 複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ と表す．

問 1.1　次の問に答えよ．
(1) 太文字 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ を手書きで書け．
(2) 例 1.1, 例 1.2 の数からなる集合に対して, N, Z, Q, R, C という文字を用いる理由を述べよ．

A を集合とする．A を構成する 1 つ 1 つのものを A の要素または元(げん)という．a が A の元であることを $a \in A$ または $A \ni a$ と表す．このとき, a は A に属する, a は A に含まれる, または A は a を含むともいう．a が A の元でないときは, 否定を意味する記号「／」を用いて, $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す．

例 1.3　1 は自然数である．すなわち, $1 \in \mathbf{N}$ である．これを $\mathbf{N} \ni 1$ とも表す．一方, -1 は自然数ではない．すなわち, $-1 \notin \mathbf{N}$ である．これを $\mathbf{N} \not\ni -1$ とも表す．

問 1.2　次の問に答えよ．
(1) $a \in \mathbf{Z}$ かつ $a \in \mathbf{Q}$ かつ $a \in \mathbf{R}$ かつ $a \in \mathbf{C}$ かつ $a \notin \mathbf{N}$ となる a を 1 つ答えよ．
(2) $a \in \mathbf{Q}$ かつ $a \in \mathbf{R}$ かつ $a \in \mathbf{C}$ かつ $a \notin \mathbf{Z}$ となる a を 1 つ答えよ．
(3) $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ かつ $\sqrt{2} \in \mathbf{C}$ かつ $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ である．$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ であることを背理法により示せ．

注意 1.2　問 1.2 の問題文のような「○○○かつ△△△」という表現は「かつ」の代わりにコンマ「,」を用いて, 簡単に「○○○, △△△」と表すこともある．ただし, 「$x = a$ または $x = b$」というような表現に対しても「$x = a, b$」と表すことがある．

A を集合とする．a および b が A の元であること, すなわち, $a \in A$, $b \in A$ であることを簡単に $a, b \in A$ と表す．また, a および b が A の元でないときは $a, b \notin A$ と表す．元の個数が 2 個を超える場合についても同様である．

例 1.4　i を虚数単位とする．このとき, i および $2-3i$ は複素数ではあるが, 実数ではない．すなわち, $i, 2-3i \in \mathbf{C}$, $i, 2-3i \notin \mathbf{R}$ である．

問 1.3　A を正の偶数全体の集合, B を正の奇数全体の集合, C を素数全体の集合とする．
(1) 互いに異なる x, y で, $x, y \in C$, $x, y \notin A$ となるものを 1 組答えよ．
(2) 互いに異なる x, y, z で, $x, y, z \in B$, $x, y, z \notin C$ となるものを 1 組答えよ．

A, B を集合とする．A のどの元も B に含まれ, B のどの元も A に含まれるとき, すなわち, $x \in A$ ならば $x \in B$ で, $x \in B$ ならば $x \in A$ となるとき, $A = B$ と表し, A と B は等しいという．また, A と B が等しくないとき, すなわち, $A = B$ でないときは $A \neq B$ と表す．$A = B$ で

ないとは, $x \in A$ であるが $x \notin B$ となる x が存在するか, または, $x \in B$ であるが $x \notin A$ となる x が存在することである.

例 1.5　A を素数ではない正の偶数全体の集合, B を 2 より大きい偶数全体の集合とする. このとき, $A = B$ である.

例 1.6　問 1.2 および例 1.4 より, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ は互いに等しくない. 例えば, $\mathbf{N} \neq \mathbf{Z}$ である.

集合を表すには構成するすべての元を中括弧 $\{\ \}$ の中に書き並べる方法が 1 つに挙げられる. これを外延的記法という. 外延的記法においては, 書き並べる元の順序は替えてもよいし, 同じ元を複数回書き並べてもよい.

例 1.7　1 と 2 からなる集合は $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$ などと表すことができる.

問 1.4　次の (1), (2) の集合を外延的記法により表せ.
(1) 3 以下の自然数全体の集合.
(2) 絶対値が 4 未満の整数全体の集合.

$\mathbf{N}$ の元を完全に書き尽くすことはできないが,

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

と表せば, これは $\mathbf{N}$ と等しいと推察することができる. これが $\mathbf{N}$ の外延的記法による表し方である. しかし, このような表し方は誤解が生じる恐れもある. また, 100 個や 1000 個といった多くの元からなる集合に対しても, 外延的記法はあまり向かない. そこで, 集合を表すもう 1 つの方法として内包的記法が挙げられる. これはある条件 C をみたすもの全体の集合を

$$\{x \,|\, x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

と表す方法である. 「$|$」の部分は代わりにコロン「$:$」やセミコロン「$;$」を用いることもある. また, 集合 A の元で, 更に条件 C をみたすもの全体の集合は

$$\{x \,|\, x \in A,\ x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

と表すことができるが, これを

$$\{x \in A \,|\, x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

とも表す.

例 1.8　0 以上の実数全体の集合は

$$\{x \,|\, x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\}$$

または

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geq 0\}$$

と表すことができる.

注意 1.3　「$\geq$」は「$\geqq$」と同じ意味である. また, 「$\leq$」は「$\leqq$」と同じ意味である.

問 1.5　次の (1), (2) の内包的記法により表された集合を外延的記法により表せ.
(1) $\{n \in \mathbf{N} \,|\, n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数}\}$.
(2) $\{n \in \mathbf{Z} \,|\, n \text{ は } pq^2 \text{ の約数}\}$. ただし, p, q は互いに異なる素数である.

元を 1 つも含まない集合も考え, これを空(くう)であるという. 空である集合, すなわち, 空集合は外延的記法では $\{\ \}$ と表すことができるが, $\emptyset$ と表すことが多い. この記号はノルウェー語のアルファベットに由来する.

例 1.9 x の 2 次方程式

$$x^2 = -1$$

の解は複素数の範囲では存在し, $x = \pm i$ であるが, 実数の範囲では存在しない. よって,

$$\{x \in \mathbf{C} \,|\, x^2 = -1\} = \{\pm i\}$$

であるが,

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 = -1\} = \emptyset$$

である. ただし, 集合 $\{i, -i\}$ を簡単に $\{\pm i\}$ と表した.

元を有限個しか含まない, すなわち, 元の個数がある $n \in \mathbf{N}$ を用いて n 個となる集合と空集合を合わせて有限集合という. 有限集合でない集合を無限集合という.

例 1.10 集合

$$\{n \in \mathbf{N} \,|\, n \leq 100\}$$

は 100 個の元からなる有限集合である. 一方, 集合

$$\{n \in \mathbf{Z} \,|\, n \leq 100\}$$

は無限集合である.

2 つの集合に対して, 次のように含む, 或いは含まれないという関係, すなわち, 包含(ほうがん)関係というものを考えることができる. A, B を集合とする. A のどの元も B に含まれるとき, すなわち, $x \in A$ ならば $x \in B$ となるとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と表し, A を B の部分集合という. このとき, A は B に含まれる, または B は A を含むともいう. ただし, 空集合は任意の集合の部分集合とみなす. すなわち, A がどのような集合であろうとも, $\emptyset \subset A$ である. また, $A \subset B$ でないときは $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ と表す. $A \subset B$ でないとは, $x \in A$ であるが $x \notin B$ となる x が存在することである. なお, $A \subset B$, $A \neq B$ のときは $A \subsetneq B$ または $B \supsetneq A$ とも表し, A を B の真部分集合という.

例 1.11 自然数は整数, 有理数, 実数, 複素数の何れでもあるから, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{C}$ である. また, 問 1.2 (1) より, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Q}$, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{C}$ と表すこともできる.

問 1.6 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ の中から互いに異なるものを 2 つ選んだときになりたつ包含関係を記号「$\subset$」を用いてすべて書け.

包含関係に関して, 次がなりたつ.

定理 1.1 A, B, C を集合とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $A \subset A$.
(2) $A \subset B$, $B \subset A$ ならば, $A = B$.
(3) $A \subset B$, $B \subset C$ ならば, $A \subset C$.

証明 (1) は明らかである. (2) のみ示す.
(2): $A \subset B$ より, $x \in A$ ならば $x \in B$ である. また, $B \subset A$ より, $x \in B$ ならば $x \in A$ である. よって, $A = B$ である. $\square$

問 1.7　定理 1.1 (3) を示せ.

$\mathbf{R}$ の部分集合でよく現れるものを定義しておこう.

定義 1.1　$a, b \in \mathbf{R}$ とする. $a < b$ のとき, $(a, b) \subset \mathbf{R}$ を

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

により定め, これを有界開区間または開区間という. また, $[a, b), (a, b] \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$

により定め, これらをそれぞれ右半開区間, 左半開区間という. $a \leq b$ のとき, $[a, b] \subset \mathbf{R}$ を

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

により定め, これを有界閉区間または閉区間という. さらに, $(a, +\infty), (-\infty, b) \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$$

により定め, これらを無限開区間という. また, $[a, +\infty), (-\infty, b] \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$$

により定め, これらを無限閉区間という. 以上の $\mathbf{R}$ の部分集合と $\mathbf{R}$ を単に区間ともいう. また, $\mathbf{R}$ は $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ とも表す.

問 1.8　次の (1), (2) の集合を区間の記号を用いて表せ.
(1) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 > 5\}$.
(2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$.

集合を元とするような集合を考えることもある. ここでは, 次のようなものを定義しておこう.

定義 1.2　A を集合とする. A の部分集合全体からなる集合を 2^A や $\mathfrak{P}(A)$ などと表し, A の巾(べき)集合という.

注意 1.4　$\mathfrak{P}$ は P のドイツ文字である. 数学では様々な文字を記号として用いるが, 英語のアルファベット以外にはギリシャ文字やドイツ文字をよく用いる. ただし, ドイツ文字を手で書く場合は似たような字体で代用することが多い.

例 1.12　$A = \emptyset$ のとき, A の部分集合は $\emptyset$ のみである. よって, $2^A = \{\emptyset\}$ である. $\emptyset$ が空集合を表すのに対して, $\{\emptyset\}$ は空集合という 1 つの集合を元とする集合であることに注意しよう.

$A = \{1\}$ のとき, A の部分集合は $\emptyset$ または $\{1\}$ である. よって, $2^A = \{\emptyset, \{1\}\}$ である.

問 1.9　次の (1), (2) の集合 A に対して, 2^A を求めよ.
(1) $A = \{1, 2\}$.
(2) $A = \{1, 2, 3\}$.

問 1.10　A を集合とする.
(1) A の巾集合を $\mathfrak{P}(A)$ とも表し, P という文字を用いる理由を述べよ.
(2) A が n 個の元からなる有限集合のとき, A の巾集合は 2^n 個の元からなる有限集合であることを二項定理を用いることにより示せ. これが A の巾集合を 2^A とも表す理由である.