§11. 無理関数と三角関数の積分

ここでは, 2 変数の有理関数 f の変数に無理関数や三角関数を代入して, 次の (i)〜(iii) の形で表される不定積分について考えよう.

$$\text{(i)} \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \ (a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc \neq 0).$$

$$\text{(ii)} \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \ (a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0).$$

$$\text{(iii)} \int f(\sin x, \cos x)\, dx.$$

以下に述べるように, これらは置換積分法を用いることにより, 有理関数の不定積分に帰着されるから, §10 で述べたことより, 不定積分を求めることができる. なお, 実際には以下で述べるものとは異なる方法を用いた方が計算が簡単になる場合もある.

まず, (i) について述べよう.

定理 11.1　(i) の不定積分について, 等式

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int f\left(\frac{dt^n - b}{-ct^n + a}, t\right) \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}\, dt$$

がなりたつ. ただし,

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

である.

証明　t の定義より,

$$(cx+d)t^n = ax+b$$

だから,

$$x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{ndt^{n-1}(-ct^n+a) - (dt^n-b)(-nct^{n-1})}{(-ct^n+a)^2}\, dt \\ &= \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}\, dt \end{aligned}$$

だから, 置換積分法より, 定理の等式が得られる. □

問 11.1　$a, b \in \mathbf{R}$ とする.

(1) 等式

$$\int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\, dx = \sqrt{(x+a)(x+b)} + (a-b)\log\left|\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right|$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式を定理 11.1 を用いることにより示せ.

問 11.2　$a, b \in \mathbf{R}$ とする.

(1) 等式

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} + (a+b)\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式を定理 11.1 を用いることにより示せ.

問 11.3　次の問に答えよ.

(1) 等式

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx = -3\left\{\frac{1}{10}(1-x)^2 - \frac{2}{7}(1-x) + \frac{1}{4}\right\}(1-x)^{\frac{4}{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式を定理 11.1 を用いることにより示せ.

次に, (ii) について述べよう.

定理 11.2　(ii) の不定積分について, 次がなりたつ.

(1) $a>0$ のとき, 等式

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx = \int f\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, t - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$$

がなりたつ. ただし,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$$

である.

(2) $a<0$, $b^2-4ac>0$ のとき, 等式

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx = \int f\left(\frac{\alpha t^2+\beta}{t^2+1}, \frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{t^2+1}\right)\frac{2(\alpha-\beta)t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

がなりたつ. ただし, α, β は $\alpha<\beta$ をみたす x の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の実数解で,

$$t = \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

である.

証明　(1): t の定義より,

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2$$

だから,

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2t(2\sqrt{a}t+b) - (t^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt \\ &= \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt \end{aligned}$$

だから, 置換積分法より, (1) の等式が得られる.
(2): t の定義より,
$$(x-\alpha)t^2 = \beta - x$$
だから,
$$x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2+1}$$
である. よって,
$$\begin{aligned} dx &= \frac{2\alpha t(t^2+1) - (\alpha t^2+\beta)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \frac{2(\alpha-\beta)t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{aligned}$$
である. また,
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a\frac{\alpha t^2+\beta-\alpha(t^2+1)}{t^2+1}\frac{\alpha t^2+\beta-\beta(t^2+1)}{t^2+1} \\ &= \frac{-a(\beta-\alpha)^2t^2}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$
だから,
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{t^2+1}$$
である. したがって, 置換積分法より, (2) の等式が得られる. □

問 11.4 $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とする.
(1) 等式
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$
がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.2 (1) を用いることにより示せ.

問 11.5 $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とする.
(1) 等式
$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$
がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.2 (1) を用いることにより示せ.
(3) (1) の等式を部分積分法を用いることにより示せ.

問 11.6 $a > 0$ とする.
(1) 等式
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$
がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.2 (2) を用いることにより示せ.
(3) (1) の等式を部分積分法を用いることにより示せ.

最後に, (iii) について述べよう.

定理 11.3 (iii) の不定積分について, 等式

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

がなりたつ. ただし,

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

である.

問 11.7 定理 11.3 を示せ.

問 11.8 次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.3 を用いることにより示せ.
(3) (1) の等式を $t = \cos x$ とおき, 置換積分法を用いることにより示せ.

問 11.9 次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx = \tan\frac{x}{2} + \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.3 を用いることにより示せ.

問 11.10 次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \tan x - \frac{1}{\tan x}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.3 を用いることにより示せ.
(3) (1) の等式を $t = \tan x$ とおき, 置換積分法を用いることにより示せ.

問 11.11 $-1 < a < 1$ とする.
(1) 等式

$$\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}\, dx = 2\tan^{-1}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.3 を用いることにより示せ.

問 11.12 $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とする.
(1) 等式

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.
(2) (1) の等式を定理 11.3 を用いることにより示せ.
(3) (1) の等式を $t = \tan x$ とおき, 置換積分法を用いることにより示せ.