

## §3. 写像

写像は集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である。

**定義 3.1**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $X$  の任意の元に対して  $Y$  のある元を対応させる規則  $f$  があたえられているとする. このことを

$$f: X \rightarrow Y$$

と表し,  $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像または  $X$  で定義された  $Y$  への写像,  $X$  を  $f$  の定義域または始域,  $Y$  を  $f$  の値域または終域という.  $Y \subset \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のときは  $f$  をそれぞれ実数値関数, 複素数値関数ともいう. また, 実数値関数, 複素数値関数を単に関数ともいう.

写像  $f$  によって  $x \in X$  に対して  $y \in Y$  が対応するとき,  $y = f(x)$  と表す. このとき,  $y$  を  $f$  による  $x$  の像,  $x$  を  $f$  による  $y$  の原像または逆像という.

**注意 3.1** 写像によって  $x$  に対して  $y$  が対応することを  $x \mapsto y$  とも表す.

**例 3.1** いわゆる 1 変数の微分積分では区間で定義された実数値関数を考える.  $I$  を区間とすると,  $I$  を定義域,  $\mathbf{R}$  を値域とする実数値関数  $f$  は  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  と表すことができる. 例えば,  $a \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = a \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は任意の  $x \in I$  に対して  $a$  を対応させる定数関数である. また,  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  を 0 でない定数,  $b \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = ax + b \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は 1 次関数である. 更に,  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  を 0 でない定数,  $b, c \in \mathbf{R}$  を定数とし,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in I)$$

により定めると,  $f$  は 2 次関数である.

**例 3.2 (定値写像)**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $y_0 \in Y$  を 1 つ選んで固定しておく. このとき, 写像  $f: X \rightarrow Y$  を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める.  $f$  を定値写像という. 例 3.1 で述べた定数関数は定値写像の例でもある.

**例 3.3 (包含写像, 恒等写像)**  $X, Y$  を空でない集合とし,  $X \subset Y$  とする. このとき, 写像  $\iota: X \rightarrow Y$  を

$$\iota(x) = x \quad (x \in X)$$

により定めることができる.  $\iota$  を包含写像という. 特に,  $X = Y$  のときは  $\iota$  を  $\text{id}_X$  または  $1_X$  と表し,  $X$  上の恒等写像という.

**問 3.1** 例 3.3 において, 包含写像, 恒等写像をそれぞれ  $\iota, \text{id}_X$  と表す理由を述べよ.

**例 3.4 (制限写像)**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし,  $A \subset X, A \neq \emptyset$  とする. このとき, 写像  $f|_A: A \rightarrow Y$  を

$$f|_A(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

により定めることができる.  $f|_A$  を  $f$  の  $A$  への制限という.

$f, g$  を写像とする.  $f$  と  $g$  の定義域が等しく,  $f$  と  $g$  の値域も等しく, 更に,  $f, g$  の定義域の任意の点  $x$  に対して  $f(x) = g(x)$  がなりたつとき,  $f = g$  と表し,  $f$  と  $g$  は等しいという. また,  $f$  と  $g$  が等しくないときは  $f \neq g$  と表す.

**問 3.2** 例 3.4 において,  $f = f|_A$  となるための必要十分条件で  $f$  を用いないものを求めよ.

**問 3.3** 関数  $f_1, f_2, \dots, f_6$  をそれぞれ

$$f_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_1(x) = x \quad (x \in \mathbf{R}), \quad f_2: \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_2(x) = x \quad (x \in \{0, 1\}),$$

$$f_3: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad f_3(x) = x \quad (x \in \{0, 1\}), \quad f_4: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_4(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$f_5: \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_5(x) = x^2 \quad (x \in \{0, 1\}), \quad f_6: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad f_6(x) = x^2 \quad (x \in \{0, 1\})$$

により定める.

(1)  $f_1$  と等しい関数をすべて求めよ.

(2)  $f_2$  と等しい関数をすべて求めよ.

写像に対してグラフという集合を対応させることができる. まず, グラフを定義するための準備として, 2つの集合の直積について述べよう.  $X, Y$  を集合とする. このとき,  $x \in X, y \in Y$  の組  $(x, y)$  全体からなる集合を  $X \times Y$  と表し,  $X$  と  $Y$  の直積という. すなわち,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

である. ただし, 上の組は順序も込みで考えたもので,  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  に対して,  $(x, y) = (x', y')$  となるのは  $x = x'$  かつ  $y = y'$  のときであるとする.

**例 3.5** 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}$  により定めると,

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}, \quad X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

である.  $X \times X$  の元  $(1, 2)$  と  $(2, 1)$  は異なるものであることに注意しよう. なお,  $X \times X$  は  $X^2$  とも表す.

**問 3.4** 例 3.5 において,  $Y \times X$  および  $Y^2$  を外延的記法により表せ.

それでは, 写像のグラフを定義しよう.

**定義 3.2**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする. このとき,  $G(f) \subset X \times Y$  を

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

により定め,  $G(f)$  を  $f$  のグラフという.

**例 3.6** 例 3.1 で述べた, 区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフは

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$$

である.  $\mathbf{R}$  と  $\mathbf{R}$  の直積  $\mathbf{R}^2$  を平面とみなすと, 平面の部分集合であるグラフ  $G(f)$  を考えることによって, 関数  $f$  を視覚的に捉えることができる.

**問 3.5** 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$  により定める.  $f$  のグラフを外延的記法により表せ.

写像の定義域や値域の部分集合に対して, それぞれ次のような値域, 定義域の部分集合を考えることができる.

**定義 3.3**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とする.

$A \subset X$  とする. このとき,  $f(A) \subset Y$  を

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

により定め,  $f(A)$  を  $f$  による  $A$  の像という. ただし,  $f(\emptyset) = \emptyset$  とする.

$B \subset Y$  とする. このとき,  $f^{-1}(B) \subset X$  を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

により定め,  $f^{-1}(B)$  を  $f$  による  $B$  の原像または逆像という. ただし,  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  とする.

**注意 3.2** 定義 3.3 において,  $f(X)$  を  $f$  の値域ということもある. この場合,  $Y$  は終域という方がよい.

**例 3.7** 問 3.5 と同じ写像  $f: X \rightarrow Y$  を考える. このとき,

$$f(\{1\}) = \{4\}, \quad f(\{1, 2\}) = \{4, 5\}, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(\{4, 5\}) = X$$

である.

**問 3.6** 問 3.5, 例 3.7 と同じ写像  $f: X \rightarrow Y$  を考える.

(1)  $f(\{2\}), f(\{3\}), f(\{1, 3\}), f(\{2, 3\}), f(X)$  を外延的記法により表せ.

(2)  $f^{-1}(\{5\}), f^{-1}(\{6\}), f^{-1}(\{4, 6\}), f^{-1}(\{5, 6\}), f^{-1}(Y)$  を外延的記法により表せ.

像および逆像に関して次がなりたつ.

**定理 3.1**  $X, Y$  を空でない集合,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への写像とし,  $A, A_1, A_2 \subset X, B, B_1, B_2 \subset Y$  とする. このとき, 次の (1)~(10) がなりたつ.

(1)  $A_1 \subset A_2$  ならば,  $f(A_1) \subset f(A_2)$ .

(2)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

(3)  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ .

(4)  $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$ .

(5)  $B_1 \subset B_2$  ならば,  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .

(6)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

(7)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

(8)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ .

(9)  $f^{-1}(f(A)) \supset A$ .

(10)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

**証明** (1), (2), (9) のみ示す.

(1):  $y \in f(A_1)$  とする. このとき, 像の定義より, ある  $x \in A_1$  が存在し,  $y = f(x)$  である. ここで,  $x \in A_1$  および仮定  $A_1 \subset A_2$  より,  $x \in A_2$  である. よって, 像の定義より,  $f(x) \in f(A_2)$ , すなわち,  $y \in f(A_2)$  である. したがって,  $y \in f(A_1)$  ならば  $y \in f(A_2)$ , すなわち,  $f(A_1) \subset f(A_2)$  である.

(2): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= \{y \in Y \mid \text{ある } x \in A_1 \cup A_2 \text{ が存在し, } y = f(x)\} \\ &= \left\{ y \in Y \mid \begin{array}{l} \text{ある } x_1 \in A_1 \text{ が存在し } y = f(x_1), \text{ または,} \\ \text{ある } x_2 \in A_2 \text{ が存在し } y = f(x_2) \end{array} \right\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ または } y \in f(A_2)\} \\ &= f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ.

(9):  $x \in A$  とする. このとき, 像の定義より,  $f(x) \in f(A)$  である. よって, 逆像の定義より,  $x \in f^{-1}(f(A))$  である. したがって,  $x \in A$  ならば  $x \in f^{-1}(f(A))$ , すなわち,  $f^{-1}(f(A)) \supset A$  である.  $\square$

**注意 3.3** 「ある $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ が存在し,  $\triangle\triangle\triangle$ である」という表現を簡単に

$$\exists \bigcirc\bigcirc\bigcirc \text{ s.t. } \triangle\triangle\triangle$$

とも表す. 「s.t.」は「such that」の略である. 例えば, 定理 3.1 (3) の証明は

$$\begin{aligned} f(A_1 \cap A_2) &= \{y \in Y \mid \exists x \in A_1 \cap A_2 \text{ s.t. } y = f(x)\} \\ &\subset \{y \in Y \mid \exists x_1 \in A_1 \text{ s.t. } y = f(x_1), \text{ かつ, } \exists x_2 \in A_2 \text{ s.t. } y = f(x_2)\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ かつ } y \in f(A_2)\} \\ &= f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

のように書くことができる. また, 「任意の $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ に対して,  $\triangle\triangle\triangle$ である」という表現は簡単に

$$\forall \bigcirc\bigcirc\bigcirc, \triangle\triangle\triangle$$

とも表す. なお, 「 $\exists$ 」や「 $\forall$ 」はそれぞれ大きく「 $\exists$ 」, 「 $\forall$ 」と表すこともある.

**問 3.7** 記号「 $\exists$ ,  $\forall$ 」はそれぞれ E, A というアルファベットに由来する. これらの記号を用いる理由を述べよ.

**問 3.8** 次の (1), (2) の文を「 $\exists$ ,  $\forall$ , s.t.」といった記号等を用いて表せ.

- (1) ある自然数  $n$  が存在し,  $f(n) = 0$  となる.
- (2) 任意の実数  $x$  に対して,  $g(x) \geq 0$  である.

**問 3.9** 次の問に答えよ.

- (1) 定理 3.1 (4) を示せ.
- (2) 定理 3.1 (5) を示せ.
- (3) 定理 3.1 (6) を示せ.
- (4) 定理 3.1 (7) を示せ.
- (5) 定理 3.1 (8) を示せ.
- (6) 定理 3.1 (10) を示せ.

**問 3.10** 集合  $X, Y$  を  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4\}$  により定め, 写像  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 3$  により定める. 次の (1)~(4) の集合を外延的記法により表せ.

- (1)  $f(\{1\} \cap \{2\})$  および  $f(\{1\}) \cap f(\{2\})$ . 特に, 定理 3.1 (3) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
- (2)  $f(\{1\} \setminus \{2\})$  および  $f(\{1\}) \setminus f(\{2\})$ . 特に, 定理 3.1 (4) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
- (3)  $f^{-1}(f(\{1\}))$ . 特に, 定理 3.1 (9) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.
- (4)  $f(f^{-1}(\{3, 4\}))$ . 特に, 定理 3.1 (10) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる.