§6. 関数の極限

ここでは, 関数の極限について述べよう. 簡単のため, $\mathbf{R}$ の部分集合で定義された実数値関数のみを考える. まず, $A \subset \mathbf{R}$ に対して, $\overline{A} \subset \mathbf{R}$ を A 内の数列の極限となるもの全体の集合とする. すなわち,

$$\overline{A} = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \text{ある数列 } \{a_n\} \text{ が存在し, 任意の } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } a_n \in A, \text{ かつ, } \lim_{n\to\infty} a_n = x \right\}$$

である. $\overline{A}$ を A の閉包という. 特に, $A \subset \overline{A}$ がなりたつ. 実際, $a \in A$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = a$ $(n \in \mathbf{N})$ により定めると, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in A$ で, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ だから, $a \in \overline{A}$ である.

問 6.1　$A \subset B \subset \mathbf{R}$ ならば, $\overline{A} \subset \overline{B}$ であることを示せ.

$\mathbf{R}$ の部分集合で定義された実数値関数を考える場合, 定義域は区間とすることが多い. 区間の閉包については, 次がなりたつ.

定理 6.1　定義 1.1 で定めた区間 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $\mathbf{R}$ に対して,

$$\overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b]} = [a,b], \quad \overline{(a,+\infty)} = \overline{[a,+\infty)} = [a,+\infty),$$

$$\overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b], \quad \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

である.

問 6.2　定理 6.1 において, $\overline{[a,b)} = [a,b]$ であることを示せ.

問 6.3　次の (1), (2) の $\mathbf{R}$ の部分集合に対して, その閉包を求めよ.
(1) $\mathbf{Z}$.
(2) $\mathbf{Q}$.

それでは, 関数の極限を定義しよう.

定義 6.1　$A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合, $f : A \to \mathbf{R}$ を A で定義された関数とし, $a \in \overline{A}$ とする.
あるある $l \in \mathbf{R}$ が存在し, $x \in A$ を $x \neq a$ をみたしながら a に十分近づければ, $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

または

$$f(x) \to l \quad (x \to a)$$

と表し, $f(x)$ は $x = a$ で極限 l に収束するという.
$x \in A$ を $x \neq a$ をみたしながら a に十分近づければ, $f(x)$ を限りなく大きくできるとき,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

または

$$f(x) \to +\infty \quad (x \to a)$$

と表し, $f(x)$ は $x = a$ で極限 $+\infty$ または正の無限大に発散するという. 同様に, 極限 $-\infty$ または負の無限大に発散する関数を定めることができる.

注意 6.1　定義 6.1 において, A が定義 1.1 で定めた区間 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ の場合, $x = a$ における極限を

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

と表し, 右極限ともいう. また, A が定義 1.1 で定めた区間 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ の場合, $x=b$ における極限を

$$\lim_{x\to b-0} f(x)$$

と表し, 左極限ともいう. なお, $x=0$ における右極限, 左極限はそれぞれ

$$\lim_{x\to +0} f(x), \quad \lim_{x\to -0} f(x)$$

とも表す.

数列の極限の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 6.2 $A\subset \mathbf{R}$ を空でない集合, $f,g: A\to\mathbf{R}$ を A で定義された関数とし, $a\in\overline{A}$ とする. $l,m\in\mathbf{R}$ をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ の $x=a$ における極限とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = l\pm m$. (複号同順)
(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = cl$.
(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.
(4) $m\neq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

なお, 関数の極限を考える際には, 特に誤解を生じる心配がなければ, 定義域ははっきりと述べないことも多い.

問 6.4 次の関数の極限を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

問 6.5 次の関数の極限を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}$.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x^2+x}{|x|}$ および $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x^2+x}{|x|}$.

関数の極限の概念を用いて, 関数の連続性を定めることができる.

定義 6.2 $A\subset\mathbf{R}$ を空でない集合, $f: A\to\mathbf{R}$ を A で定義された関数とする.
$a\in A$ に対して,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつとき, $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという.
任意の $a\in A$ に対して, $f(x)$ が $x=a$ で連続なとき, $f(x)$ は A で連続であるという.

例 6.1 $A\subset\mathbf{R}$ を空でない集合とすると, 1 変数の多項式で表される関数, 正弦関数, 余弦関数, 指数関数は A で連続となる. また, $A\subset(0,+\infty)$ のとき, 対数関数は A で連続となる.

数列の極限の場合と同様に, 関数の極限に対しても, はさみうちの原理がなりたつ.

例 6.2 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ で定義された関数 $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ を

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$$

により定める．ここで, $0 \in \mathbf{R} = \overline{\mathbf{R} \setminus \{0\}}$ である．$f(x)$ の $x = 0$ における極限を求めよう．

まず, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 半径 1, 中心角 x の扇形の面積を考えると, 不等式

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

がなりたつ．すなわち,

$$\cos x < f(x) < 1$$

である．また, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ のとき,

$$\cos(-x) = \cos x, \quad f(-x) = f(x)$$

だから, 上の式は $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときも成り立つ．ここで, 例 6.1 より,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \cos x &= \cos 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

である．よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

である．

問 6.6　極限 $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ をはさみうちの原理を用いることにより求めよ．

問 6.7　次の関数の極限を求めよ．
(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.
(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$A \subset \mathbf{R}$ とする．ある $M \in \mathbf{R}$ が存在し, 任意の $x \in A$ に対して, $x < M$ となるとき, A は上に有界であるという．また, ある $m \in \mathbf{R}$ が存在し, 任意の $x \in A$ に対して, $m < x$ となるとき, A は下に有界であるという．A は上にも下にも有界なとき, 単に有界であるという．

問 6.8　定義 1.1 で定めた区間 (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $\mathbf{R}$ について, 上に有界なもの, 下に有界なもの, 有界なものをそれぞれ求めよ．

上或いは下に有界でない $\mathbf{R}$ の部分集合で定義された実数値関数については, 次のような極限を考えることもできる．

定義 6.3　$A \subset \mathbf{R}$ を空でない集合, $f : A \to \mathbf{R}$ を A で定義された関数とする．

A が上に有界でないとする．ある $l \in \mathbf{R}$ が存在し, $x \in A$ を十分大きくすれば, $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

または

$$f(x) \to l \quad (x \to +\infty)$$

と表し, $f(x)$ は $x \to +\infty$ のとき, 極限 l に収束するという．また, $x \in A$ を十分大きくすれば, $f(x)$ を限りなく大きくできるとき,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

または

$$f(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

と表し, $f(x)$ は $x \to +\infty$ のとき, 極限 $+\infty$ または正の無限大に発散するという.

同様に, $x \to +\infty$ のとき, 極限 $-\infty$ または負の無限大に発散する関数を定めることができる. 更に, A が下に有界でないときは $x \to -\infty$ のときの極限を定めることができる.

注意 6.2 $x \to \pm\infty$ のときの極限についても, 定理 6.2 と同様の事実がなりたつ.

例 6.3 $x > 1$ のとき, $n \in \mathbf{N}$ を $n \leq x < n+1$ となるように選んでおくと, 不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

がなりたつ. ここで, 例 5.4 より,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n+1}} \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

である. 再び, 例 5.4 より,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

である. $x \to +\infty$ のとき, $n \to \infty$ だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

である.

問 6.9 次の等式を示せ.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

問 6.10 関数の極限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

をはさみうちの原理を用いることにより求めよ.