§7. 関数の微分と双曲線関数

関数の極限の概念を用いて, 関数の微分を考えることができる. そして, 微分可能な関数に対しては, その微分を考えることにより, 関数の変化の様子を調べることができる.

以下では, 簡単のため I を開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかとし, I で定義された実数値関数 $f: I \to \mathbf{R}$ を考える. まず, $a, b \in I$, $a \neq b$ とすると, x が a から b へと変わるとき, $f(x)$ は $f(a)$ から $f(b)$ へと変わるが, これらの変化の量の比

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を平均変化率という. 平均変化率は関数の変化の様子を知る 1 つの目安となるが, $f(x)$ を x で微分するということは, a と b を限りなく近づけたときの瞬間の変化率を考えることである.

定義 7.1 $f: I \to \mathbf{R}$ を関数とする.

$a \in I$ とする. 極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbf{R}$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという. このとき, 上の極限を $f'(a)$ または $\dfrac{df}{dx}(a)$ などと表し, $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という.

$f(x)$ が任意の $a \in I$ で微分可能なとき, f は I で微分可能であるという. このとき, I で定義された実数値関数 f' または $\dfrac{df}{dx}$ を f の導関数という.

問 7.1 $c \in \mathbf{R}$ を固定しておき, 関数 $f: I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = c \quad (x \in I)$$

により定める. すなわち, f は定数関数である. このとき, 任意の $x \in I$ に対して, $f'(x) = 0$ であることを示せ.

微分可能性は連続性よりも強い概念である. すなわち, 次がなりたつ.

定理 7.1 $f: I \to \mathbf{R}$ を関数とし, $a \in I$ とする. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

問 7.2 定理 7.1 を示せ.

問 7.3 関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではないことを示せ. 特に, 関数は連続であったとしても微分可能であるとは限らない.

$x \in \mathbf{R}$ に対して, x^n $(n \in \mathbf{N})$, $\sin x$, $\cos x$, e^x を対応させることにより, $\mathbf{R}$ で連続な関数が得られるが, これらをそのまま x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x と表すことにする. このとき, 次がなりたつ.

定理 7.2 次の (1)〜(4) が成り立つ.

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$.
(2) $(\sin x)' = \cos x$.
(3) $(\cos x)' = -\sin x$.

(4) $(e^x)' = e^x$.

証明　(1), (2) のみ示す.
(1): 二項定理より,

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{({}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_nh^n) - x^n\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right\}\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ.
(2): 例 6.2 より,

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\\ &= \cos x\end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ. □

問 7.4　次の問に答えよ.
(1) 定理 7.2 (3) を示せ.
(2) 定理 7.2 (4) を示せ.

$f, g : I \to \mathbf{R}$ を関数とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 5 つの関数

$$f+g, f-g, cf, fg, \frac{f}{g} : I \to \mathbf{R}$$

を定めることができる. ただし, $\frac{f}{g}$ については, 任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ であるとする. このようにして得られる関数の微分に関して, 次がなりたつことが分かる.

定理 7.3　$f, g : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする. このとき, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$. (複号同順)
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $(cf)' = cf'$.
(3) $(fg)' = f'g + fg'$. (積の微分法)
(4) 任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ のとき, $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. (商の微分法)

問 7.5　$\mathbf{R}$ で定義された関数

$$2x + \sin x - e^x\cos x$$

の導関数を求めよ.

問 7.6 $f, g, h : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする. このとき, 等式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

がなりたつことを示せ.

例 7.1 方程式

$$\cos x = 0$$

の解は

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$$

であるから, $A \subset \mathbf{R}$ を

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbf{Z}) \right\}$$

により定めると, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ は A で連続な関数となる. 更に, A は開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れでもないが, $\tan x$ は A で微分可能で, 定理 7.2 (2), (3) および商の微分法より, $x \in A$ とすると,

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

である.

問 7.7 商の微分法を用いることにより, 次の等式を示せ.

(1) $\left(\dfrac{1}{x^n} \right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$. ただし, $n \in \mathbf{N}$ である.

(2) $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

指数関数を用いて, $\mathbf{R}$ で連続な関数 $\cosh x$, $\sinh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. $\cosh x$, $\sinh x$ をそれぞれ双曲線余弦関数, 双曲線正弦関数という. また, これらをまとめて双曲線関数という. 三角関数の場合と同様に, $(\cosh x)^2$ などを $\cosh^2 x$ のように表すことが多い. 双曲線関数は三角関数と同様の公式をみたすが, 符号が異なることもあるので, 注意する必要がある.

問 7.8 双曲線関数について, 次の問に答えよ.

(1) 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, 等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ がなりたつことを示せ.

(2) 「双曲線関数」という言葉を用いる理由を答えよ.

(3) $x, y \in \mathbf{R}$ とすると, 加法定理

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

がなりたつことを示せ.

定理 7.2 (4), 定理 7.3 (1), (2), 問 7.7 (2) より, 次がなりたつ.

定理 7.4　$\cosh x$, $\sinh x$ は $\mathbf{R}$ で微分可能で,

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

がなりたつ.

問 7.9　定理 7.4 を示せ.

問 7.10　$\mathbf{R}$ で連続な関数 $\tanh x$ を

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定め, これを双曲線正接関数という. 次の等式を示せ.
(1) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.
(2) $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

I に加え, J も開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかであるとし, $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$ を $f(I) \subset J$ をみたす関数とする. このとき, f と g の合成関数 $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ を考えることができる. すなわち,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in I)$$

である. 合成関数の微分に関して, 次がなりたつことが分かる.

定理 7.5 (合成関数の微分法)　$f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$ をそれぞれ I, J で微分可能な関数とし, $f(I) \subset J$ であるとする. このとき, 任意の $x \in I$ に対して,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

がなりたつ.

問 7.11　次の (1), (2) の関数の導関数を求めよ.
(1) e^{ax^2+bx+c}. ただし, $a, b, c \in \mathbf{R}$ は定数である.
(2) $\sin \cosh x + \cosh \sin x$.

問 7.12　$n \in \mathbf{N}$ とし, 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める.
(1) f は $\mathbf{R}$ で連続であることを示せ.
(2) f が $\mathbf{R}$ で微分可能となるための n の条件を求め, 更に, f が $\mathbf{R}$ で微分可能となるときの f の導関数を求めよ.
(3) f が $\mathbf{R}$ で微分可能となるとき, f の導関数が $\mathbf{R}$ で連続となるための n の条件を求めよ.