

### §9. 不定積分と定積分

実数を変数とする実数値関数に対しては、微分とは逆の操作を考えることができる。以下では、簡単のため  $I$  は開区間、無限開区間、 $\mathbf{R}$  の何れかであるとする。

**定義 9.1**  $f, F : I \rightarrow \mathbf{R}$  を関数とする。  $F$  が  $I$  で微分可能で、  $F' = f$  となるとき、

$$F = \int f(x) dx$$

と表し、  $F$  を  $f$  の原始関数という。

1つの関数に対する原始関数は一通りには定まらない。実際、定理 8.5 (1) を用いることにより、次を示すことができる。

**定理 9.1**  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  を関数、  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f$  の1つの原始関数とする。このとき、  $f$  の任意の原始関数  $G : I \rightarrow \mathbf{R}$  は  $C \in \mathbf{R}$  を用いて

$$G(x) = F(x) + C \quad (x \in I)$$

と表される。

なお、定理 9.1 における定数  $C$  を積分定数という。

**問 9.1** 定理 9.1 を示せ。

§7 および §8 で扱ったことと原始関数の定義より、次の定理は明らかである。なお、以下では積分定数は省略することにする。また、原始関数

$$\int \frac{1}{f(x)} dx$$

を

$$\int \frac{dx}{f(x)}$$

とも表す。

**定理 9.2** 次の (1)～(11) がなりたつ。

(1)  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq -1$  とすると,  $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ .

(2)  $\int \frac{dx}{x} = \log |x|$ .

(3)  $\int \sin x dx = -\cos x$ .

(4)  $\int \cos x dx = \sin x$ .

(5)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ .

(6)  $\int \sinh x dx = \cosh x$ .

(7)  $\int \cosh x dx = \sinh x$ .

$$(8) \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x.$$

$$(9) a > 0, a \neq 1 \text{ とすると, } \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x.$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \text{ または } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x.$$

$$(11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$$

原始関数は平面内の図形の面積と深い関係がある. 実は, 多変数の実数値関数に対しては, 積分は微分の逆の操作というよりも, 寧ろ図形の面積或いは体積として捉える必要がある. なお, 次の定義では面積の厳密な定義は省略することにする.

**定義 9.2**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[a, b]$  で定義された関数とする. 曲線  $y = f(x)$  と直線  $x = a$ ,  $x = b$  および  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $x$  軸より上の部分は正, 下の部分は負として加えたものが存在するとき, これを

$$\int_a^b f(x) dx$$

と表し,  $f$  の  $[a, b]$  における定積分という. このとき,  $f$  は  $[a, b]$  で積分可能であるという. また,  $f$  を被積分関数という.

関数の積分可能性については, 次が基本的である.

**定理 9.3**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[a, b]$  で連続な関数とする. このとき,  $f$  は  $[a, b]$  で積分可能である.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[a, b]$  で積分可能な関数とする. このとき, 関数  $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

により定めることができる. これを  $f$  の不定積分という. 不定積分は被積分関数の原始関数であることが分かる. すなわち, 次がなりたつ.

**定理 9.4 (微分積分学の基本定理)**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[a, b]$  で積分可能な関数とし,  $F$  を  $f$  の不定積分とする. このとき,

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b])$$

がなりたつ. ただし,  $F'(a)$ ,  $F'(b)$  はそれぞれ右微分係数, 左微分係数, すなわち,

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow a+0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{h \rightarrow b-0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}$$

である.

定理 9.1 と微分積分学の基本定理を用いることにより, 次がなりたつことが分かる.

**定理 9.5**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[a, b]$  で積分可能な関数,  $F$  を  $f$  の原始関数とする. このとき,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

がなりたつ.

**問 9.2** 定理 9.5 を示せ.

**注意 9.1** 定理 9.5 の等式において, 右辺は

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

と表すことが多い. また, 積分の計算をする際には,

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \int 1 dx = \int dx$$

等と表すこともある. 更に, 原始関数と不定積分は定数の差だけしか違いがないため, 区別しないことも多い.

次の定理は不定積分の基本的な性質であるが, 定積分についても同様の事実がなりたつ.

**定理 9.6**  $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$  を原始関数をもつ関数とすると, 次の (1)~(4) がなりたつ.

(1)  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ . (複号同順)

(2)  $c \in \mathbf{R}$  とすると,  $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$ .

(3) (部分積分法)  $f, g$  が微分可能ならば,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

(4) (置換積分法)  $J$  を  $I$  と同様の区間とし,  $x: J \rightarrow \mathbf{R}$  を  $x(J) \subset I$  となる微分可能な関数とすると,

$$\int f(x) dx = \int f(x(t))x'(t) dt.$$

**証明** 両辺を直接微分して, 等しくなることを示せばよい. □

**問 9.3**  $m, n \in \mathbf{N}$  とする. 次の定積分の値を求めよ.

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ .

(2)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ .

(3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx$ .

**例 9.1**  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を  $I$  で微分可能な関数とする. このとき,  $t = f(x)$  とおくと,

$$\frac{dt}{dx} = f'(x)$$

であるが, これを

$$dt = f'(x) dx$$

と表し, 置換積分法を用いて,

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log |t| \\ &= \log |f(x)| \end{aligned}$$

と計算してよい.

**問 9.4** 次の定積分の値を求めよ.

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx.$

(2)  $\int_0^1 \tanh x \, dx$

**問 9.5** 部分積分法を用いることにより, 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \log x \, dx.$

(2)  $\int \sin^{-1} x \, dx.$

(3)  $\int \tan^{-1} x \, dx.$

**問 9.6**  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$  とする. このとき, 2つの不定積分

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

を求めよ.

**問 9.7**  $a > 0$  とする.  $x = at$  とおき, 置換積分法を用いることにより, 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

(2)  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

**問 9.8** 次の問に答えよ.

(1)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  を閉区間  $[0, 1]$  で連続な関数とする. このとき, 等式

$$\int_0^\pi x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx$$

がなりたつことを示せ.

(2) (1) を用いることにより, 定積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

の値を求めよ.

(3) (1) を用いることにより, 定積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \sin x} \, dx$$

の値を求めよ.