§10. 置換

§9 の後半ではトレースについて述べたが, 線形変換に対して定められる固有の量は他にも考えることができる. 行列式はその 1 つであるが, ここでは行列式を定義するための準備として, 置換について述べよう.

$n \in \mathbf{N}$ に対して, 1 から n までの自然数全体の集合を X_n とおく. すなわち,

$$X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

である. このとき, X_n から X_n への全単射を n 文字の置換という. 要するに, n 文字の置換とは n 個の数 1, 2, ..., n の並べ替えのことである. n 文字の置換全体の集合を S_n と表す.

問 10.1　S_n の元の個数を n の式で表せ.

$\sigma \in S_n$ によって, 1, 2, ..., n が k_1, k_2, ..., k_n と並べ替えられるとき, すなわち,

$$\sigma(i) = k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のとき,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す. 上の式の右辺は $2 \times n$ 行列を表しているのではないことに注意しよう.

例 10.1 (恒等置換)　恒等写像 $1_X \in S_n$ は ε とも表し, 恒等置換または単位置換ともいう. すなわち,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である.

なお, 上のように置換を表す際には, 並べ替えた後の数字が並べ替える前の数字の真下に書いてさえあればよく, 幾つかの数字が変わらないときは, 変わらない部分を省略して書くこともある.

例 10.2　1, 2, 3, 4 を 4, 2, 1, 3 と並べ替える 4 文字の置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

等と表すことができる.

問 10.2　1, 2, 3, 4 を 1, 4, 3, 2 と並べ替える 4 文字の置換を例 10.2 のように 3 通りの方法で表せ.

全単射と全単射の合成は全単射であるから, $\sigma, \tau \in S_n$ とすると, $\sigma \circ \tau \in S_n$ である. $\sigma \circ \tau$ を $\sigma\tau$ と表し, σ と τ の積という. 特に, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して, 等式

$$\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$$

がなりたつ. また, 写像の合成は結合律をみたすから, $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ のとき, $(\sigma\tau)\rho$ および $\sigma(\tau\rho)$ はともに $\sigma\tau\rho$ と書いても構わない.

例 10.3 $\sigma, \tau \in S_n$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，

$$(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1, \quad (\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(4) = 3,$$

$$(\sigma\tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 2, \quad (\sigma\tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(1) = 4$$

である．よって，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である．

なお，$\sigma, \tau \in S_n$ に対して，$\sigma\tau = \tau\sigma$ がなりたつとは限らないことにも注意しておこう．

問 10.3 置換 σ, τ を次のように定めるとき，積 $\sigma\tau$ および $\tau\sigma$ を求めよ．

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

全単射に対しては逆写像が存在するから，$\sigma \in S_n$ とすると，σ の逆写像 $\sigma^{-1} \in S_n$ が存在する．σ^{-1} を σ の逆置換という．すなわち，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

のとき，

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

であり，σ は等式

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$$

をみたす．

互いに異なる $k_1, k_2, \ldots, k_r \in X_n$ に対して，

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix} \in S_n$$

を

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$$

と表し，巡回置換という．特に，$(k_1\ k_2)$ と表される巡回置換を互換という．このとき，次がなりたつことが分かる．

定理 10.1 任意の置換は幾つかの巡回置換の積で表される．更に，任意の置換は幾つかの互換の積で表される．

証明 後半の主張のみ示す.

前半の主張を用いて, 置換を巡回置換の積で表しておく. 巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ に対して,

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1})\cdots(k_1\ k_3)(k_1\ k_2)$$

がなりたつから, 任意の置換は幾つかの互換の積で表される. □

$\sigma \in S_n$ が m 個の互換の積で表されるとき, $\operatorname{sgn}\sigma \in \{\pm 1\}$ を

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^m$$

により定め, これを σ の符号という. ただし, $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$ と約束する. このとき, 次がなりたつことが分かる.

定理 10.2 置換の符号は互換の積の表し方に依存しない.

例 10.4 $\sigma \in S_7$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

により定める. σ の定義より,

$$\sigma(1) = 4, \quad \sigma(4) = 2, \quad \sigma(2) = 1$$

であるが, これを

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

と表すことにする. このとき,

$$3 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 3$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \sigma &= (3\ 5\ 6\ 7)(1\ 4\ 2) \\ &= (3\ 7)(3\ 6)(3\ 5)(1\ 2)(1\ 4) \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\sigma &= (-1)^5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

である.

問 10.4 次の置換 σ の符号を求めよ.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

置換の符号の基本的な性質を述べておこう.

定理 10.3 $\sigma, \tau \in S_n$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$.

(2) $\mathrm{sgn}\,(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,\sigma$.

問 10.5　次の問に答えよ.
(1) 定理 10.3 (1) を示せ.
(2) 定理 10.3 (2) を示せ.

また, 次がなりたつことが分かる.

定理 10.4　$\sigma \in S_n$ とすると, 等式

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

がなりたつ. ただし, $\prod$ は積を表す記号であり, $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n}$ は $1 \leq i < j \leq n$ をみたすすべての自然数 i, j について, 積を考えることを意味する.

問 10.6　積を表す記号として, Π を用いる理由を述べよ.

問 10.7　定理 10.4 を用いることにより, 次の $\sigma \in S_4$ に対して, $\mathrm{sgn}\,\sigma$ の値を求めよ.
(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

置換は偶数個の互換の積で表されるとき, 符号が 1 となり, 奇数個の互換の積で表されるとき, 符号が -1 となる. そこで, $\sigma \in S_n$ は $\mathrm{sgn}\,\sigma = 1$ のとき偶置換, $\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ のとき奇置換という.

例 10.5　まず,

$$S_1 = \{\varepsilon\}$$

であり, ε は偶置換である.
また,

$$S_2 = \{\varepsilon, (1\ 2)\}$$

であり, ε は偶置換, $(1\ 2)$ は奇置換である.

問 10.8　S_3 を外延的記法により表し, S_3 の部分集合で, 偶置換全体からなるもの, 奇置換全体からなるものをそれぞれ求めよ.

問 10.9　$n = 2, 3, 4, \ldots$ のとき, S_n の部分集合で, 偶置換全体からなるもの, 奇置換全体からなるものの元の個数はともに $\dfrac{n!}{2}$ であることを示せ.

問 10.10　n 変数 x_1, x_2, $\ldots$, x_n の多項式 f および $\sigma \in S_n$ に対して, 多項式 f_σ を

$$f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

により定める. f および σ が次の (1), (2) によりあたえられるとき, f_σ を求めよ.
(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$.
(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + x_1 + x_2 x_3 + x_4^3$, $\sigma = (1\ 4\ 2) \in S_4$.