## §2. 線形写像

ベクトル空間の間の写像を考える際には, 単なる写像ではなく, 次に定めるような意味でベクトル空間としての構造を保つものを考えることが多い.

**定義 2.1** $V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への写像とする. $f$ が次の (1), (2) をみたすとき, $f$ を線形写像という.

(1) 任意の $x, y \in V$ に対して, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x \in V$ に対して, $f(cx) = cf(x)$.

線形写像の基本的な性質を挙げておこう.

**定理 2.1** $V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $f(0_V) = 0_W$. ただし, $V$, $W$ の零ベクトルをそれぞれ $0_V$, $0_W$ と表す.
(2) $x_1, x_2, \ldots, x_m \in V$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ とすると, 等式

$$f(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m) = c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + \cdots + c_mf(x_m)$$

がなりたつ.

**証明** (1) のみ示す.
ベクトル空間および線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(0_V) &= f(0 \cdot 0_V) \\ &= 0f(0_V) \\ &= 0_W, \end{aligned}$$

すなわち, $f(0_V) = 0_W$ である. □

**問 2.1** 数学的帰納法を用いることにより, 定理 2.1 (2) を示せ.

線形写像の例について考えよう.

**例 2.1 (零写像)** $V$, $W$ をベクトル空間とし，$V$ から $W$ への写像 $f : V \to W$ を

$$f(x) = 0_W \quad (x \in V)$$

により定める. このとき, $f$ は定義 2.1 の (1), (2) の条件をみたすから, 線形写像である. これを零写像という,

**例 2.2 (線形変換, 恒等変換)** $V$ をベクトル空間とする. このとき, $V$ から $V$ への線形写像を $V$ の線形変換ともいう.
例えば, $V$ から $V$ への写像 $1_V : V \to V$ を

$$1_V(x) = x \quad (x \in V)$$

により定める. このとき, $1_V$ は定義 2.1 の (1), (2) の条件をみたすから, $V$ の線形変換である. これを $V$ の恒等変換という.

例 1.1 で述べた数ベクトル空間の間の線形写像がどのように表されるのかについて考えよう. まず, $n \in \mathbf{N}$ とし, $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbf{R}^n$ を

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

により定める. すなわち, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $e_i$ は第 $i$ 成分が 1 であり, その他の成分がすべて 0 である, $n$ 次の行ベクトルである. $e_1$, $e_2$, $\ldots$, $e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルという. $\mathbf{R}^n$ における和とスカラー倍の定義より, 次がなりたつ.

**定理 2.2** $x \in \mathbf{R}^n$ とする. $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x_i$ を $x$ の第 $i$ 成分とすると,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

がなりたつ. 逆に, $x$ が上のように表されるならば, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x_i$ は $x$ の第 $i$ 成分である.

定理 2.1 (2) と定理 2.2 を用いることにより, 次を示すことができる.

**定理 2.3** $m, n \in \mathbf{N}$ とし, $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像とする. このとき, ある $mn$ 個の実数 $a_{11}$, $a_{21}$, $\ldots$, $a_{mn}$ が一意的に存在し, 任意の $x \in \mathbf{R}^m$ に対して, $f(x)$ は

$$f(x) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1}, \ldots, x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn}) \qquad (*)$$

と表すことができる. ただし, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x_i$ は $x$ の第 $i$ 成分である.

**証明** まず, $e_1$, $e_2$, $\ldots$, $e_m$ を $\mathbf{R}^m$ の基本ベクトルとする. このとき, 定理 2.2 より, $x$ は

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.

次に, $e'_1$, $e'_2$, $\ldots$, $e'_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとする. このとき, $i = 1, 2, \ldots, m$ とすると, 定理 2.2 より, $f(e_i)$ は

$$f(e_i) = a_{i1} e'_1 + a_{i2} e'_2 + \cdots + a_{in} e'_n \quad (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる. また, $a_{11}$, $a_{21}$, $\ldots$, $a_{mn}$ は一意的である.

よって, 定理 2.1 (2) より,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m) \\
&= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_m f(e_m) \\
&= x_1 (a_{11} e'_1 + a_{12} e'_2 + \cdots + a_{1n} e'_n) + x_2 (a_{21} e'_1 + a_{22} e'_2 + \cdots + a_{2n} e'_n) + \cdots \\
&\quad + x_m (a_{m1} e'_1 + a_{m2} e'_2 + \cdots + a_{mn} e'_n) \\
&= (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1}, \ldots, x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn})
\end{aligned}$$

となる. □

**問 2.2** 定理 2.3 において, $(*)$ のように定められる $f$ は $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像であることを示せ.

**問 2.3** $\Sigma$ を例 1.3 で定めた実数列全体からなるベクトル空間とする.

(1) $\Sigma$ から $\Sigma$ への写像 $\Phi : \Sigma \to \Sigma$ を

$$\Phi(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad (\{a_n\} \in \Sigma), \quad b_n = a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める. $\Phi$ は $\Sigma$ の線形変換であることを示せ.
(2) $\Sigma$ から $\Sigma$ への写像 $\Psi : \Sigma \to \Sigma$ を

$$\Psi(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad (\{a_n\} \in \Sigma), \quad b_1 = 0, \quad b_n = a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める. $\Psi$ は $\Sigma$ の線形変換であることを示せ.

**問 2.4**　$I$ を開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかであるとし, $C(I)$ を $I$ で連続な実数値関数全体からなるベクトル空間, $C^1(I)$ を $I$ で連続微分可能な実数値関数全体からなるベクトル空間とする.
(1) $C^1(I)$ から $C(I)$ への写像 $\Phi$ を

$$\Phi(f) = f' \quad (f \in C^1(I))$$

により定める. $\Phi$ は線形写像であることを示せ.
(2) $a \in I$ とし, $C(I)$ から $C^1(I)$ への写像 $\Psi$ を

$$(\Psi(f))(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (f \in C(I),\ x \in I)$$

により定める. $\Psi$ は線形写像であることを示せ.

線形写像の合成は線形写像となる. すなわち, 次がなりたつ.

**定理 2.4**　$U$, $V$, $W$ をベクトル空間, $f : U \to V$, $g : V \to W$ をそれぞれ $U$ から $V$, $V$ から $W$ への線形写像とする. このとき, 合成写像 $g \circ f : U \to W$ は $U$ から $W$ への線形写像である.

**証明**　$g \circ f$ が定義 2.1 の (1) の条件をみたすことのみ示す.
$x, y \in U$ とすると, 合成写像および線形写像の定義より,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

である. よって,

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

となり, $g \circ f$ は定義 2.1 の (1) の条件をみたす. □

**問 2.5**　定理 2.4 において, $g \circ f$ が定義 2.1 の (2) の条件をみたすを示せ.

$V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする. このとき, $\mathrm{Im}\, f \subset W$ および $\mathrm{Ker}\, f \subset V$ をそれぞれ

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in W \mid x \in V\}, \quad \mathrm{Ker}\, f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$$

により定める. $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ をそれぞれ $f$ の像, 核という.

**問 2.6**　線形写像 $f$ の像, 核をそれぞれ $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ と表す理由を述べよ.

線形写像の像や核について, 次がなりたつ.

**定理 2.5** $V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\mathrm{Im}\, f$ は $W$ の部分空間である.
(2) $\mathrm{Ker}\, f$ は $V$ の部分空間である.

**証明** (1) において, $\mathrm{Im}\, f$ が定理 1.3 の (1) の条件をみたすことのみ示す.
定理 2.1 (1) より,

$$0_W = f(0_V) \in \mathrm{Im}\, f$$

である. よって, $0_W \in \mathrm{Im}\, f$ となり, $\mathrm{Im}\, f$ は定理 1.3 の (1) の条件をみたす. □

**問 2.7** 次の問に答えよ.
(1) 定理 2.5 (1) において, $\mathrm{Im}\, f$ が定理 1.3 の (2), (3) の条件をみたすことを示せ.
(2) 定理 1.3 を用いることにより, 定理 2.5 (2) を示せ.

また, 次がなりたつ.

**定理 2.6** $V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $f$ が全射であることと $\mathrm{Im}\, f = W$ は同値である.
(2) $f$ が単射であることと $\mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$ は同値である.

**問 2.8** 次の問に答えよ.
(1) 定理 2.6 (1) において, $f$ が全射ならば, $\mathrm{Im}\, f = W$ であることを示せ.
(2) 定理 2.6 (1) において, $\mathrm{Im}\, f = W$ ならば, $f$ は全射であることを示せ.
(3) 定理 2.6 (2) において, $f$ が単射ならば, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$ であることを示せ.
(4) 定理 2.6 (2) において, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$ ならば, $f$ は単射であることを示せ.

更に, 次がなりたつ.

**定理 2.7** $V$ をベクトル空間, $f : V \to V$ を $V$ の線形変換とする. このとき, 合成写像 $f \circ f : V \to V$ が零写像であることと $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ は同値である.

**問 2.9** 次の問に答えよ.
(1) 定理 2.7 において, $f \circ f$ が零写像ならば, $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ であることを示せ.
(2) 定理 2.7 において, $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ ならば, $f \circ f$ は零写像であることを示せ.

全単射な線形写像については, 次がなりたつ.

**定理 2.8** $V$, $W$ をベクトル空間, $f : V \to W$ を $V$ から $W$ への線形写像とする. $f$ が全単射ならば, $f$ の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ は $W$ から $V$ への線形写像である.

**問 2.10** 次の問に答えよ.
(1) 定理 2.8 において, $f^{-1}$ が定義 2.1 の (1) の条件をみたすことを示せ.
(2) 定理 2.8 において, $f^{-1}$ が定義 2.1 の (2) の条件をみたすことを示せ.

定理 2.8 において, 全単射 $f$ を線形同型写像という. また, $V$ から $W$ への線形同型写像が存在するとき, $V$ と $W$ は同型であるという.