

## §7. 次元

2つのベクトル空間が同型であるのかどうか, すなわち, それらの間に線形同型写像が存在するのかどうかはどのように調べればよいのであろうか. それには, 同型なベクトル空間に対して変わらない量である, 次元というものを調べればよいことが分かる. まず, 次元について述べるための準備から始めよう.

**定義 7.1**  $V$  をベクトル空間とし,  $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$  とする.

式

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$$

を  $x_1, x_2, \dots, x_m$  の 1 次結合という.

等式

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = 0$$

を  $x_1, x_2, \dots, x_m$  の 1 次関係という.

$x_1, x_2, \dots, x_m$  が自明な 1 次関係しかもたないとき, すなわち, 上の 1 次関係がなりたつのは

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

のときに限るとき,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  は 1 次独立であるという. また,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  が 1 次独立でないとき,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  は 1 次従属であるという.

**注意 7.1** 「1 次」という言葉は「線形」という言葉に置き換えられることもある. 例えば, 1 次結合を線形結合ともいう.

$\mathbf{R}^n$  に対しては, 次がなりたつ.

**定理 7.1**  $\mathbf{R}^n$  の基本ベクトル  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は 1 次独立である.

**問 7.1** 定理 7.1 を示せ.

**問 7.2**  $\Sigma$  を例 1.3 で定めた実数列全体からなるベクトル空間とし,  $p, q \in \mathbf{R}$  とする. このとき,  $\{a_n\}, \{b_n\} \in \Sigma$  を

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_{n+2} = pb_{n+1} + qb_n, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1 \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める.  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は 1 次独立であることを示せ.

**問 7.3**  $I$  を开区間, 無限开区間,  $\mathbf{R}$  の何れかであるとし,  $C(I)$  を  $I$  で連続な実数値関数全体からなるベクトル空間とする. このとき,  $n \in \mathbf{N}$  に対して,  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n \in C(I)$  を

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad f_n(x) = x^n \quad (x \in I)$$

により定める.  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  は 1 次独立であることを示せ.

1つのみのベクトルの 1 次独立性については, 次がなりたつ.

**定理 7.2**  $V$  をベクトル空間とし,  $x \in V$  とする. このとき,  $x$  が 1 次独立であることと  $x \neq 0$  であることは同値である. また,  $x$  が 1 次従属であることと  $x = 0$  であることは同値である.

**証明** 対偶を考えることにより, 後半の主張を示せばよい.

$x$  が 1 次従属ならば,  $x = 0$  であることのみ示す.

$x$  が 1 次従属であると仮定する. 1 次従属性の定義より, ある  $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  が存在し,

$$cx = 0$$

である. よって,

$$\begin{aligned} 0 &= c^{-1}0 \\ &= c^{-1}(cx) \\ &= (c^{-1}c)x \\ &= 1x \\ &= x, \end{aligned}$$

すなわち,  $x = 0$  である. □

**問 7.4** 定理 7.2 において,  $x = 0$  ならば,  $x$  は 1 次従属であることを示せ.

**問 7.5**  $A \in M_n(\mathbf{R})$  とする.  $A^m = O$  かつ  $m \geq 2$  をみたす  $m \in \mathbf{N}$  が存在し, 更に, ある  $x \in \mathbf{R}^n$  が存在し,  $xA^{m-1} \neq 0$  となると仮定する.  $x, xA, xA^2, \dots, xA^{m-1}$  は 1 次独立であることを示せ.

ベクトルの 1 次結合を考えることにより, ベクトル空間の部分空間を定めることができる.

**定理 7.3**  $V$  をベクトル空間とし,  $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$  とする. このとき,  $V$  の部分集合  $W$  を

$$W = \{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \mid c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}\}$$

により定めると,  $W$  は  $V$  の部分空間となる.

**証明**  $W$  が定理 1.3 の (1)~(3) の条件をみたすことを示せばよい.

$W$  が定理 1.3 の (1) の条件をみたすことのみ示す.

$0 \in \mathbf{R}$  だから,  $W$  の定義より,

$$0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m \in W,$$

すなわち,  $0 \in W$  である. □

**問 7.6** 次の問に答えよ.

(1) 定理 7.3 において,  $W$  が定理 1.3 の (2) の条件をみたすことを示せ.

(2) 定理 7.3 において,  $W$  が定理 1.3 の (3) の条件をみたすことを示せ.

定理 7.3 で定めた  $W$  を

$$W = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle_{\mathbf{R}}$$

とも表し,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  で生成されるまたは張られる  $V$  の部分空間という. なお,  $\langle \ , \ \rangle$  の右下の  $\mathbf{R}$  は  $V$  が  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間であり, 1 次結合を考えるときの  $x_1, x_2, \dots, x_m$  の係数  $c_1, c_2, \dots, c_m$  が実数であることを意味する.

**例 7.1**  $e_1, e_2, \dots, e_n$  を  $\mathbf{R}^n$  の基本ベクトルとすると,

$$\mathbf{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle_{\mathbf{R}}$$

である. 実際, これは定理 2.2 で述べたことの言い換えに過ぎない.

**問 7.7**  $V$  をベクトル空間とし,  $W_1, W_2$  を  $V$  の部分空間とする.  $W_1, W_2$  がそれぞれ  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in V$  を用いて,

$$W_1 = \langle x_1, \dots, x_m \rangle_{\mathbf{R}}, \quad W_2 = \langle y_1, \dots, y_n \rangle_{\mathbf{R}}$$

と表されるならば,  $W_1$  と  $W_2$  の和空間  $W_1 + W_2$  は

$$W_1 + W_2 = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \rangle_{\mathbf{R}}$$

と表されることを示せ.

ベクトル空間があたえられると, それを生成するベクトルの中で, 基底とよばれる性質の良いものを考えることができる. 後に定義するベクトル空間の次元には有限のものと無限のものがあり, 無限次元のベクトル空間に対しても基底の概念を考えることができるが, ここでは主に有限次元のベクトル空間を扱うこととし, 基底を次のように定める.

**定義 7.2**  $V$  をベクトル空間とし,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  とする. 組  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が次の (1), (2) をみたすとき,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  を  $V$  の基底という.

- (1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次独立である.
- (2)  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbf{R}}$  がなりたつ.

**例 7.2 ( $\mathbf{R}^n$  の標準基底)**  $e_1, e_2, \dots, e_n$  を  $\mathbf{R}^n$  の基本ベクトルとする. このとき, 定理 7.1 より,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  は定義 7.2 の (1) の条件をみたし, 例 7.1 より,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  は定義 7.2 の (2) の条件をみたす. よって,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の基底である. これを  $\mathbf{R}^n$  の標準基底という.

**例 7.3** ベクトル空間  $\mathbf{R}^2$  について考え,  $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^2$  を

$$a_1 = (1, 1), \quad a_2 = (0, 1)$$

により定める.

まず,  $a_1, a_2$  が 1 次関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

をみたすと仮定する. このとき, 上の式の左辺を計算することにより,

$$(c_1, c_1 + c_2) = (0, 0)$$

となるから,

$$c_1 = c_2 = 0$$

である. よって,  $\{a_1, a_2\}$  は定義 7.2 の (1) の条件をみたす.

次に,  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$  とし,  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$  に対する方程式

$$(x_1, x_2) = c_1 a_1 + c_2 a_2$$

を解くと,

$$c_1 = x_1, \quad c_2 = x_2 - x_1$$

である. よって,  $\{a_1, a_2\}$  は定義 7.2 の (2) の条件をみたす.

したがって,  $\{a_1, a_2\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の基底である.

**問 7.8** ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  について考え,  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}^3$  を

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (0, 0, 1)$$

により定める.  $\{a_1, a_2, a_3\}$  は  $\mathbf{R}^3$  の基底であることを示せ.

例 7.3 および問 7.8 でそれぞれ定めた  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^3$  の基底  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{a_1, a_2, a_3\}$  を構成する元の個数は、標準基底を構成する元の個数と同じく、それぞれ 2, 3 である。実は、一般に次がなりたつことが分かる。

**定理 7.4**  $V$  を定義 7.2 で定めた基底をもつベクトル空間とする。このとき、 $V$  の基底を構成するベクトルの個数は基底の選び方に依存しない。

定理 7.4 より、ベクトル空間の次元を次のように定める。

**定義 7.3**  $V$  を定義 7.2 で定めた基底をもつベクトル空間とする。 $V$  の基底を構成するベクトルの個数を  $\dim V$  と表し、 $V$  の次元という。ただし、零空間の次元は 0 であると約束する。

零空間および定義 7.2 で定めた基底をもつベクトル空間の次元は有限であるという。次元が有限でないベクトル空間の次元は無限であるという。

**例 7.4**  $\mathbf{R}^n$  の標準基底を構成する元の個数は  $n$  である。よって、 $\mathbf{R}^n$  の次元は  $n$ 、すなわち、

$$\dim \mathbf{R}^n = n$$

である。

**例 7.5** §4 で述べたように、 $m$  行  $n$  列の実行列全体の集合  $M_{m,n}(\mathbf{R})$  はベクトル空間となるのであった。ここで、 $m$  行  $n$  列の実行列とは実数を長方形に  $mn$  個並べたものであるから、 $M_{m,n}(\mathbf{R})$  は数ベクトル空間  $\mathbf{R}^{mn}$  と同一視することができる。よって、例 7.4 より、 $M_{m,n}(\mathbf{R})$  の次元は  $mn$ 、すなわち、

$$\dim M_{m,n}(\mathbf{R}) = mn$$

である。

**問 7.9**  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $(i, j)$  成分が 1 で、その他の成分がすべて 0 の  $M_{m,n}(\mathbf{R})$  の元を  $E_{ij}$  と表し、行列単位という。

- (1)  $M_{2,3}(\mathbf{R})$  の元である行列単位をすべて具体的に書け。
- (2)  $\{E_{ij} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)\}$  は  $M_{m,n}(\mathbf{R})$  の基底であることを示せ。

**例 7.6** 問 7.2 や問 7.3 でも扱ったベクトル空間  $\Sigma$ ,  $C(I)$  に対しては、有限個の元を選んだだけではこれらを生成することができないことが分かる。よって、 $\Sigma$  および  $C(I)$  はともに無限次元である。

最初に述べたことは次のようにまとめることができる。

**定理 7.5**  $V, W$  を有限次元のベクトル空間とする。このとき、 $V$  と  $W$  が同型であることと  $\dim V = \dim W$  は同値である。

**問 7.10** 次の問に答えよ。

- (1) 定理 7.5 において、 $V$  と  $W$  が同型ならば、 $\dim V = \dim W$  であることを示せ。
- (2) 定理 7.5 において、 $\dim V = \dim W$  ならば、 $V$  と  $W$  は同型であることを示せ。

**問 7.11**  $W$  を  $n$  次の対称行列全体の集合とする。

- (1)  $W$  は  $M_n(\mathbf{R})$  の部分空間であることを示せ。
- (2)  $W$  の次元を求めよ。

**問 7.12**  $W$  を  $n$  次の交代行列全体の集合とする。

- (1)  $W$  は  $M_n(\mathbf{R})$  の部分空間であることを示せ。
- (2)  $W$  の次元を求めよ。