§9. 表現行列とトレース

有限次元のベクトル空間の間の線形写像に対しては, 基底を選んでおくことにより, 表現行列という行列を対応させることができる. V, W をベクトル空間とし, $f \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$ とする. ここで, V, W の基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ をそれぞれ選んでおく. ただし, $m = \dim V$, $n = \dim W$ である. このとき, $i = 1, 2, \dots, m$ に対して, W の基底 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ に関する $f(v_i)$ の成分を a_{i1}, a_{i2}, $\dots$, a_{in} とする. すなわち,

$$f(v_i) = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

である. そこで, $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ を $A = (a_{ij})$ により定め, 上の式をまとめて

$$\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_m) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

と表す. A を V, W の基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ に関する f の表現行列という. 問 8.1 より, V, W の基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ に関する f の表現行列 A は一意的である. 特に, $V = W$ とし, f の定義域も値域も同じ基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を考えるとき, 対応する表現行列を V の基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ に関する f の表現行列という.

注意 9.1 成分や基底変換行列の場合と同様に, 表現行列は上で定めた A の代わりに,

$$(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)) = (w_1, w_2, \dots, w_n)A'$$

と表される $A' \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ であると定める場合もある. このとき, $A' = {}^tA$ である.

問 9.1 $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とし, $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ を

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

により定める. $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ の標準基底に関する f の表現行列は A であることを示せ.

問 9.2 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^2$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$a_1 = (1, 1), \quad a_2 = (0, 1), \quad b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (0, 1, 1), \quad b_3 = (0, 0, 1)$$

により定めると, 例 7.3 および問 7.8 より, $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ はそれぞれ $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ の基底である.
(1) $f_1 \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ を

$$f_1(x) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ に関する f_1 の表現行列を求めよ.
(2) $f_2 \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ を

$$f_2(x) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{b_1, b_2, b_3\}$, $\{a_1, a_2\}$ に関する f_2 の表現行列を求めよ.

(3) $f_3 \in \mathrm{End}\,(\mathbf{R}^2)$ を

$$f_3(x) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{a_1, a_2\}$ に関する f_3 の表現行列を求めよ.

(4) $f_4 \in \mathrm{End}\,(\mathbf{R}^3)$ を

$$f_4(x) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{b_1, b_2, b_3\}$ に関する f_4 の表現行列を求めよ.

表現行列が基底変換によってどのように変わるのかについては, 次のように述べることができる.

定理 9.1 V, W をベクトル空間とし, $f \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$ とする. また, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ を V の基底, P を基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \to \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ に関する基底変換行列, $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, $\{w'_1, w'_2, \ldots, w'_n\}$ を W の基底, Q を基底変換 $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \to \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_n\}$ に関する基底変換行列とする. 更に, A を V, W の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ に関する f の表現行列, B を V, W の基底 $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$, $\{w'_1, w'_2, \ldots, w'_n\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = PAQ^{-1}$$

がなりたつ.

問 9.3 次の問に答えよ.

(1) B および Q の定義を用いることにより, 等式

$$\begin{pmatrix} f(v'_1) \\ \vdots \\ f(v'_m) \end{pmatrix} = BQ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ.

(2) P および A の定義を用いることにより, 等式

$$\begin{pmatrix} f(v'_1) \\ \vdots \\ f(v'_m) \end{pmatrix} = PA \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

がなりたつことを示せ.

(3) (1), (2) を用いることにより, 定理 9.1 を示せ.

定理 9.1 を線形変換の場合に適用すると, 次が得られる.

定理 9.2 V をベクトル空間とし, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ とする. また, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ を V の基底, P を基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ に関する基底変換行列とする. 更に, A を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = PAP^{-1}$$

がなりたつ.

次に, 線形変換に対して定められる固有の量の 1 つであるトレースについて述べよう. V をベクトル空間とし, $\Phi \in (\mathrm{End}\,(V))^*$ とする. このとき, 双対空間の定義より, 任意の $f, g \in \mathrm{End}\,(V)$ および任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g), \quad \Phi(cf) = c\Phi(f)$$

がなりたつ.

問 9.4 $\dim V = n$ のとき, $\dim(\mathrm{End}\,(V))^*$ を n の式で表せ.

問 9.5 V をベクトル空間, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を V の基底とする. このとき, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, $f_i \in V^*$ を

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

となるように定める.
(1) $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ は定義 7.2 の (1) の条件をみたす, すなわち, 1 次独立であることを示せ.
(2) $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ は定義 7.2 の (2) の条件をみたす, すなわち, V^* を生成することを示せ.
(3) $x \in V$ に対して, V^* から $\mathbf{R}$ への写像 $\iota(x) : V^* \to \mathbf{R}$ を

$$(\iota(x))(f) = f(x) \quad (f \in V^*)$$

により定める. $\iota(x) \in (V^*)^*$ であることを示せ.
(4) ι は V から $(V^*)^*$ への線形同型写像を定めることを示せ.

注意 9.2 問 9.5 において, (1), (2) より, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ は V^* の基底である. これを $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ の双対基底という. また, (4) より, V と $(V^*)^*$ は ι を通して同じベクトル空間とみなすことができる. これが双対空間の「双対」という言葉の意味である.

さて, 問 9.4 より, 上のような Φ は多く存在するが, 次がなりたつ.

定理 9.3 V をベクトル空間とし, $\Phi \in (\mathrm{End}\,(V))^*$ が次の (1), (2) をみたすと仮定する.

(1) 任意の $f, g \in \mathrm{End}\,(V)$ に対して, $\Phi(f \circ g) = \Phi(g \circ f)$.
(2) $\Phi(1_V) = \dim V$.

このとき, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を V の基底とし, $f \in \mathrm{End}\,(V)$ に対して, 基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とおくと,

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

すなわち, $\Phi(f)$ は A の対角成分の和である. 逆に, このように定められる Φ は上の (1), (2) をみたし, 基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ の選び方に依存しない.

定理 9.3 を示すには, 定理 9.2 に注意し, 表現行列を考えることにより, 次を示せばよい.

定理 9.4 $\Psi \in (M_n(\mathbf{R}))^*$ が次の (1), (2) をみたすと仮定する.

(1) 任意の $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, $\Psi(AB) = \Psi(BA)$.
(2) $\Psi(E) = n$.

このとき,

$$\Psi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})),$$

すなわち, $\Psi(A)$ は A の対角成分の和である. 逆に, このように定められる Ψ は上の (1), (2) をみたし, 更に, $P \in M_n(\mathbf{R})$ を正則行列とすると,

$$\Psi(PAP^{-1}) = \Psi(A)$$

である.

そこで, 定理 9.3, 定理 9.4 において,

$$\mathrm{tr}\, f = \Phi(f), \quad \mathrm{tr}\, A = \Psi(A)$$

と表し, これらをそれぞれ f, A のトレースまたは跡(せき)という. 同様に, 複素ベクトル空間の線形変換や複素正方行列に対しても, トレースを定めることができる.

問 9.6　$\Psi \in (M_n(\mathbf{R}))^*$ とする.
(1) $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して, E_{ij} を問 7.9 で述べた行列単位とする. Ψ が定理 9.4 の (1) の条件をみたすならば,

$$\Psi(E_{11}) = \Psi(E_{22}) = \cdots = \Psi(E_{nn}), \quad \Psi(E_{ij}) = 0 \quad (i \neq j)$$

であることを示せ.
(2) (1) を用いることにより, 定理 9.4 の (1), (2) の条件をみたす Ψ と $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, $\Psi(A)$ は A の対角成分の和となることを示せ.

問 9.7　次の問に答えよ.
(1) $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ ならば,

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$$

であることを示せ.
(2) $A, P \in M_n(\mathbf{R})$ とする. P が正則ならば,

$$\mathrm{tr}\,(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}\, A$$

であることを示せ.

注意 9.3　$A \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, トレースの定義より,

$$\mathrm{tr}\, {}^tA = \mathrm{tr}\, A$$

である. よって, 表現行列を注意 9.1 で述べたように定義しても, 線形変換に対するトレースは変わらない.

問 9.8　W をトレースが 0 となる n 次実行列全体の集合とする.
(1) W は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間であることを示せ.
(2) W の次元を求めよ.