§2. 集合の演算

集合に対していろいろな演算を考えることができる. すなわち, 幾つかの集合から新たな集合を定めることができる. A, B を集合とする. このとき, 集合 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ を

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \,|\, x \in A \text{ または } x \in B\}, \\
A \cap B &= \{x \,|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \\
A \setminus B &= \{x \,|\, x \in A \text{ かつ } x \notin B\}
\end{aligned}
$$

により定め, それぞれ A と B の和, 共通部分, 差という. $A \setminus B$ は $A - B$ とも表す.

$A \cap B \neq \emptyset$ のとき, A と B は交わるという. A と B が交わらないとき, すなわち, $A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は互いに素であるともいう. また, このとき, $A \cup B$ を A と B の直和という. $A \cup B$ が A と B の直和であることを $A \sqcup B$ や $A \amalg B$ とも表す.

例 2.1 集合 A, B を

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}$$

により定める. このとき,

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{3\}$$

である. 特に, A と B は交わる.

和や共通部分について, 次がなりたつ.

定理 2.1 A, B を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A, B \subset A \cup B$.
(2) $A \cap B \subset A, B$.

証明 (1): $x \in A$ ならば, $x \in A \cup B$ である. よって, $A \subset A \cup B$ である. 同様に, $B \subset A \cup B$ である.
(2): $x \in A \cap B$ ならば, $x \in A$ である. よって, $A \cap B \subset A$ である. 同様に, $A \cap B \subset B$ である. □

また, 次がなりたつ.

定理 2.2 A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A, B \subset C$ ならば, $A \cup B \subset C$.
(2) $C \subset A, B$ ならば, $C \subset A \cap B$.

証明 (1): $x \in A \cup B$ とする. このとき, $x \in A$ または $x \in B$ である. $x \in A$ のとき, $A \subset C$ より, $x \in C$ である. また, $x \in B$ のとき, $B \subset C$ より, $x \in C$ である. よって, $x \in A$ または $x \in B$, すなわち, $x \in A \cup B$ ならば, $x \in C$ である. したがって, $A \cup B \subset C$ である.
(2): $x \in C$ とする. このとき, $C \subset A$ より, $x \in A$ である. また, $C \subset B$ より, $x \in B$ である. よって, $x \in C$ ならば, $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち, $x \in A \cap B$ である. したがって, $C \subset A \cap B$ である. □

注意 2.1 定理 2.1 (1) と定理 2.2 (1) より, $A \cup B$ は A と B を含む集合の中で, 包含関係に関して最小のものであるという言い方をすることができる. また, 定理 2.1 (2) と定理 2.2 (2) より, $A \cap B$ は A と B に含まれる集合の中で, 包含関係に関して最大のものであるという言い方をすることができる.

次がなりたつことはほとんど明らかであろう.

定理 2.3 A, B, C を集合とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $A \cup B = B \cup A$. (和の交換律)
(2) $A \cap B = B \cap A$. (共通部分の交換律)
(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (和の結合律)
(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (共通部分の結合律)

注意 2.2 和の結合律より, $(A \cup B) \cup C$ および $A \cup (B \cup C)$ はともに

$$A \cup B \cup C$$

と表しても構わない. 更に, 和の交換律より,

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A$$

である. 共通部分についても同様である.
なお, 例 2.1 からも分かるように, 差は交換律をみたさない.

更に, 次がなりたつ.

定理 2.4 (分配律) A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

証明 (1) のみ示す.
まず,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

を示す. $x \in (A \cup B) \cap C$ とする. このとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$, すなわち, $x \in A$ または $x \in B$, かつ $x \in C$ である. よって, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$, すなわち,

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

である. したがって,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

である.
次に,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

を示す. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ とする. このとき, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$ である. $x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$ である. よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C$$

である. $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$ である. よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C$$

である. したがって,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

である.

以上より, (1) がなりたつ. □

注意 2.3 定理 2.4 の分配律程度の事実であれば, Venn 図という図を描いて確認することができる. しかし, より多くの個数からなる集合の演算については, 上の証明のように定義にしたがって議論することが必要となることが多い.

差集合に関する基本的性質についても述べておこう.

定理 2.5 A, B, C を集合とする. $A \subset B$ ならば, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A \setminus C \subset B \setminus C$.
(2) $C \setminus B \subset C \setminus A$.

証明 (1) のみ示す.
$x \in A \setminus C$ とする. このとき, $x \in A$ かつ $x \notin C$ である. ここで, $A \subset B$ より, $x \in B$ である. よって, $x \in B$ かつ $x \notin C$, すなわち, $x \in B \setminus C$ である. したがって, (1) がなりたつ. □

例 2.2 A, B を集合とする. このとき,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

であることを示そう.
まず, 定理 2.1 (1) より, $A \subset A \cup B$ である. よって, 定理 2.5 (1) より,

$$A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B$$

である.
次に, $x \in (A \cup B) \setminus B$ とする. このとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ である. よって, $x \in A$ かつ $x \notin B$, すなわち, $x \in A \setminus B$ である. したがって,

$$(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B$$

である.
以上より, 最初の等式が示された.

最後に, 数学の様々な場面でよく用いられる, 次の事実を挙げておこう.

定理 2.6 (de Morgan の法則) X, A, B を集合とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

証明 (1) のみ示す.
まず,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \{x \,|\, x \in X,\ x \notin A \cup B\} \\
&= \{x \in X \,|\, x \notin A \cup B\} \\
&= \{x \in X \,|\, x \notin A \text{ かつ } x \notin B\} \\
&= \{x \,|\, x \in X \setminus A \text{ かつ } x \in X \setminus B\} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ. □

問題 2

1. 集合 A, B, C を

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\}, \quad C = \{3, 4, 5\}$$

により定める. $(A \setminus B) \setminus C$ および $A \setminus (B \setminus C)$ を求めよ. 特に, 差は結合律をみたさないことが分かる.

2. A, B を集合とし,

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

とおく. $A \ominus B$ を A と B の対称差という. 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.
(1) $A \ominus A = \emptyset$.
(2) $A \ominus \emptyset = A$.
(3) $A \ominus B = B \ominus A$. すなわち, 対称差は交換律をみたす.

3. n 次実行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表し, $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 $\mathrm{Sym}(n)$ および $\mathrm{Skew}(n)$ を

$$\mathrm{Sym}(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid X \text{ は対称行列}\},$$
$$\mathrm{Skew}(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid X \text{ は交代行列}\}$$

により定める.
(1) $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると,

$$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in \mathrm{Sym}(n), \quad \frac{1}{2}(X - {}^tX) \in \mathrm{Skew}(n)$$

であることを示せ. ただし, ${}^tX$ は X の転置行列を表す.
(2) $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 $\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n)$ を

$$\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n) = \{X + Y \mid X \in \mathrm{Sym}(n),\ Y \in \mathrm{Skew}(n)\}$$

により定める. このとき,

$$\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n) = M_n(\mathbf{R})$$

であることを示せ.
(3) $\mathrm{Sym}(n) \cap \mathrm{Skew}(n)$ を求めよ.

問題 2 の解答

1. 差の定義より,

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= \{1\} \setminus \{3,4,5\} \\ &= \{1\}, \\ A \setminus (B \setminus C) &= \{1,2,3\} \setminus \{2\} \\ &= \{1,3\}\end{aligned}$$

である.

2. (1) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned}A \ominus A &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ.

(2) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned}A \ominus \emptyset &= (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A\end{aligned}$$

である. よって, (2) がなりたつ.

(3) 対称差の定義と和の交換律より,

$$\begin{aligned}A \ominus B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= B \ominus A\end{aligned}$$

である. よって, (3) がなりたつ.

3. (1) 転置行列の性質より,

$$\begin{aligned}{}^t\left\{\frac{1}{2}(X + {}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X + {}^tX) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX + {}^{tt}X) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX + X) \\ &= \frac{1}{2}(X + {}^tX),\end{aligned}$$

すなわち,

$${}^t\left\{\frac{1}{2}(X + {}^tX)\right\} = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$$

である. よって, 対称行列の定義より,

$$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in \mathrm{Sym}(n)$$

である.

また,

$$
\begin{aligned}
{}^t\left\{\frac{1}{2}(X - {}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X - {}^tX) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX - {}^{tt}X) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX - X) \\
&= -\frac{1}{2}(X - {}^tX),
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
{}^t\left\{\frac{1}{2}(X - {}^tX)\right\} = -\frac{1}{2}(X - {}^tX)
$$

である. よって, 交代行列の定義より,

$$
\frac{1}{2}(X - {}^tX) \in \mathrm{Skew}(n)
$$

である.

(2) まず, $\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n)$ の定義より,

$$
\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n) \subset M_n(\mathbf{R})
$$

である.

次に, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, (1) より,

$$
X = \frac{1}{2}(X + {}^tX) + \frac{1}{2}(X - {}^tX) \in \mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n),
$$

すなわち, $X \in \mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n)$ である. よって,

$$
M_n(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n)
$$

である.

したがって,

$$
\mathrm{Sym}(n) + \mathrm{Skew}(n) = M_n(\mathbf{R})
$$

である.

(3) $X \in \mathrm{Sym}(n) \cap \mathrm{Skew}(n)$ とすると, $X \in \mathrm{Sym}(n)$ かつ $X \in \mathrm{Skew}(n)$ だから, 対称行列および交代行列の定義より,

$$
\begin{aligned}
X &= {}^tX \\
&= -X,
\end{aligned}
$$

すなわち, $X = -X$ である. よって, $X = O$ となる. したがって,

$$
\mathrm{Sym}(n) \cap \mathrm{Skew}(n) = \{O\}
$$

である.