§4. 全射, 単射と合成写像

写像に関する基本的概念として, 全射および単射というものが挙げられる.

定義 4.1 X, Y を空でない集合, $f: X \to Y$ を X から Y への写像とする.
任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在し, $y = f(x)$ となるとき, f を上への写像または全射という.
$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ ならば, $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるとき, f を 1 対 1 の写像または単射という.
全射かつ単射である写像を全単射という.

注意 4.1 定義 4.1 において, f が全射であるとは $f(X) = Y$ となることである.
また, f が単射であるとは, 対偶を考えると, $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば, $x_1 = x_2$ となることである. よって, f がこの条件をみたすことを単射の定義としてもよい.

例 4.1 関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, f は全射ではない. 実際, 例えば, -1 は f の値域の元, すなわち, $-1 \in \mathbf{R}$ であるが, $f(x) = -1$ となる定義域の元, すなわち, $x^2 = -1$ となる $x \in \mathbf{R}$ は存在しない. また, f は単射ではない. 実際, 例えば, -1 および 1 は定義域の異なる元, すなわち, $-1, 1 \in \mathbf{R}$, $-1 \neq 1$ であるが, $f(-1) = f(1) = 1$ である.

例 4.2 X を空でない集合とし, $n \in \mathbf{N}$ に対して, 1 から n までの自然数全体の集合を X_n とおく. X が n 個の元からなる有限集合であるとは, X から X_n への全単射が存在することに他ならない.

問題 3.3 で述べたように, 定理 3.1 (3), (4), (9), (10) においては, 必ずしも等号がなりたつとは限らないのであった. しかし, 写像が全射或いは単射である場合は等号を示すことができる.

定理 4.1 X, Y を空でない集合, $f: X \to Y$ を X から Y への写像とし, $A, A_1, A_2 \subset X$, B, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) f が単射ならば, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
(2) f が単射ならば, $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(3) f が単射ならば, $f^{-1}(f(A)) = A$.
(4) f が全射ならば, $f(f^{-1}(B)) = B$.

証明 (2), (4) のみ示す.
(2): まず, 定理 3.1 (4) より,

$$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$$

は常になりたつ.
次に, $y \in f(A_1 \setminus A_2)$ とする. このとき, 像の定義より, ある $x \in A_1 \setminus A_2$ が存在し, $y = f(x)$ となる. 特に, $x \in A_1$ だから, $y \in f(A_1)$ である. ここで, $y \notin f(A_2)$ であることを背理法により示す. $y \in f(A_2)$ であると仮定する. このとき, ある $x' \in A_2$ が存在し, $y = f(x')$ となる. 仮定より, f は単射だから, $x = x'$ である. よって, $x \in A_2$ となり, $x \in A_1 \setminus A_2$ であることに矛盾する. したがって, $y \notin f(A_2)$ だから, $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ である. すなわち,

$$f(A_1 \setminus A_2) \subset f(A_1) \setminus f(A_2)$$

である.
以上より, (2) がなりたつ.

(4): まず, 定理 3.1 (10) より,

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

は常になりたつ.

次に, $y \in B$ とする. 仮定より, f は全射だから, ある $x \in X$ が存在し, $y = f(x)$ となる. よって, 逆像の定義より, $x \in f^{-1}(B)$ である. 更に, 像の定義より, $y \in f(f^{-1}(B))$ である. したがって,

$$f(f^{-1}(B)) \supset B$$

である.

以上より, (4) がなりたつ. □

次に, 合成写像について述べよう. X, Y, Z を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への写像とする. このとき, X から Z への写像 $g \circ f : X \to Z$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

により定めることができる. $g \circ f$ を f と g の合成写像または合成という.

例 4.3 集合 X, Y, Z を $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $Z = \{7, 8, 9\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$, $g(4) = 9$, $g(5) = 8$, $g(6) = 7$ により定める. このとき, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が定義される. 例えば,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(4) \\ &= 9\end{aligned}$$

である.

写像の合成は結合律をみたす. すなわち, 次がなりたつ.

定理 4.2 (結合律) X, Y, Z, W を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ をそれぞれ X から Y, Y から Z, Z から W への写像とする. このとき, 等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

がなりたつ. 特に, $h \circ (g \circ f)$ および $(h \circ g) \circ f$ はともに $h \circ g \circ f$ と表しても構わない.

証明 まず, 合成写像の定義より, $h \circ (g \circ f)$ および $(h \circ g) \circ f$ はともに X から W への写像である.

次に, $x \in X$ とすると, 合成写像の定義より,

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x),\end{aligned}$$

すなわち,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

である.

よって, 等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

がなりたつ. □

注意 4.2 X を空でない集合, $f, g : X \to X$ を X から X への写像とする. このとき, 2 つの合成写像 $g \circ f, f \circ g : X \to X$ を考えることができるが, $f \circ g = g \circ f$ がなりたつとは限らない.

例えば, $X = \mathbf{R}$ とし, 関数 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = -x + 1, \quad g(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 直接計算することにより,

$$(g \circ f)(-1) = 4, \quad (f \circ g)(-1) = 0$$

となることが分かるから,

$$(g \circ f)(-1) \neq (f \circ g)(-1)$$

である. よって, $g \circ f \neq f \circ g$ である.

写像の合成について, 次がなりたつ.

定理 4.3 X, Y, Z を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ. 特に, f, g がともに全単射ならば, $g \circ f$ も全単射である.
(1) f, g がともに全射ならば, $g \circ f$ は全射である.
(2) f, g がともに単射ならば, $g \circ f$ は単射である.

証明 (1) のみ示す.
$z \in Z$ とする. 仮定より, g は全射だから, ある $y \in Y$ が存在し, $z = g(y)$ となる. 更に, 仮定より, f は全射だから, ある $x \in X$ が存在し, $y = f(x)$ となる. よって, $z = g(f(x))$, すなわち, $z = (g \circ f)(x)$ となる. したがって, $g \circ f$ は全射である. □

また, 次がなりたつことが分かる.

定理 4.4 X, Y, Z を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への写像とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.
(2) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とし, f が全単射であると仮定する. このとき, $y \in Y$ とすると, f は全射であるから, ある $x \in X$ が存在し, $y = f(x)$ となる. 更に, f は単射であるから, このような x は一意的である. よって, y に対して x を対応させる規則を考えることができる. これを f^{-1} と表し, f の逆写像という. f^{-1} は Y から X への全単射となる. 更に, f^{-1} の逆写像は f である. なお, 写像を関数という場合は, 逆写像を逆関数ともいう.

例 4.4 (指数関数, 対数関数) $a > 0$, $a \neq 1$ をみたす a を 1 つ固定しておく. このとき, 関数 $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ を

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. すなわち, f は a を底とする指数関数である. f は全単射となるから, f の逆関数 $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ が存在するが, これは a を底とする対数関数に他ならない. すなわち,

$$f^{-1}(y) = \log_a y \quad (y \in (0, +\infty))$$

である.

問題 4

1. 関数 $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ および $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}), \quad g(x) = x^2 \quad (x \in [0, +\infty))$$

により定める.
(1) f は全射であるが, 単射ではないことを示せ.
(2) g は全射ではないが, 単射であることを示せ.

2. X, Y を空でない集合とし, $X \subset Y$ とする. X から Y への包含写像は単射であることを示せ.

3. 集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 3$, $f(2) = 3$ により定める. f は全射でも単射でもないことを示せ.

4. 関数 $f, g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ を

$$f(x) = -x + 1, \quad g(x) = x^2 \quad (x \in \{0, 1\})$$

により定める. このとき, $g \circ f = f \circ g$ であることを示せ.

5. 集合 X, Y, Z を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $g(3) = 5$, $g(4) = 5$ により定める. このとき, $g \circ f$ は全射であることを示せ. なお, g は全射であるが, f は全射ではないから, 特に, 定理 4.3 (1) の逆は必ずしもなりたたないことが分かる.

6. 集合 X, Y, Z を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, $Z = \{6, 7\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $g(3) = 6$, $g(4) = 7$, $g(5) = 7$ により定める. このとき, $g \circ f$ は単射であることを示せ. なお, f は単射であるが, g は単射ではないから, 特に, 定理 4.3 (2) の逆は必ずしもなりたたないことが分かる.

7. X, Y, Z を空でない集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への全単射とすると, 定理 4.3 より, $g \circ f : X \to Z$ は X から Z への全単射である. このとき, 等式

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

がなりたつことを示せ.

8. V, W をベクトル空間, $f : V \to W$ を V から W への線形写像とする. $\mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$ であることと f が単射であることは同値であることを示せ. ただし, $\mathrm{Ker}\, f$ は f の核を表し, 0_V は V の零ベクトルを表す.

問題 4 の解答

1. (1) まず, $y \in [0, +\infty)$ とする. このとき, $x \in \mathbf{R}$ を $x = \sqrt{y}$ により定めると,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt{y}) \\ &= (\sqrt{y})^2 \\ &= y, \end{aligned}$$

すなわち, $f(x) = y$ である. よって, f は全射である.

一方, $-1, 1 \in \mathbf{R}$, $-1 \neq 1$ であるが,

$$f(-1) = f(1) = 1$$

である. よって, f は単射ではない.

(2) まず, $-1 \in \mathbf{R}$ であるが, $f(x) = -1$, すなわち, $x^2 = -1$ となる $x \in [0, +\infty)$ は存在しない. よって, f は全射ではない.

一方, $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $f(x_1) = f(x_2)$ とする. このとき, $x_1^2 = x_2^2$ であり, $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ より, $x_1 = x_2$ である. よって, f は単射である.

2. $\iota : X \to Y$ を X から Y への包含写像とし, $x_1, x_2 \in X$, $\iota(x_1) = \iota(x_2)$ とする. このとき, 包含写像の定義より, $x_1 = x_2$ である. よって, ι は単射である.

3. まず, $4 \in Y$ であるが, $f(x) = 4$ となる $x \in X$ は存在しない. よって, f は全射ではない.

また, $1, 2 \in X$, $1 \neq 2$ であるが,

$$f(1) = f(2) = 3$$

である. よって, f は単射ではない.

したがって, f は全射でも単射でもない.

4. まず, $g \circ f$ と $f \circ g$ の定義域, 値域はともに $\{0, 1\}$ であり, それぞれ等しい.

次に,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) \\ &= g(1) \\ &= 1, \\ (f \circ g)(0) &= f(g(0)) \\ &= f(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(0) \\ &= 0, \\ (f \circ g)(1) &= f(g(1)) \\ &= f(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．よって, 任意の $x \in \{0,1\}$ に対して, $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ である．

したがって, $g \circ f = f \circ g$ である．

5. Z の元は 5 のみだから, $(g \circ f)(1) = 5$, $(g \circ f)(2) = 5$ である．よって, $g \circ f$ は全射である．

6. f および g の定義より,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\ &= g(3) \\ &= 6, \\ (g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g(4) \\ &= 7,\end{aligned}$$

すなわち, $(g \circ f)(1) = 6$, $(g \circ f)(2) = 7$ である．よって, $g \circ f$ は単射である．

7. まず, $(g \circ f)^{-1}$ は Z から X への写像である．一方, g^{-1}, f^{-1} はそれぞれ Z から Y, Y から X への写像だから, $f^{-1} \circ g^{-1}$ は Z から X への写像である．よって, $(g \circ f)^{-1}$ と $f^{-1} \circ g^{-1}$ の定義域, 値域はそれぞれ等しい．

次に, $z \in Z$ とし, $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y)$ とおく．このとき,

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(z) &= f^{-1}(g^{-1}(z)) \\ &= f^{-1}(y) \\ &= x,\end{aligned}$$

すなわち, $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$ である．一方, 逆写像の定義より, $g(y) = z$, $f(x) = y$ だから,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= z,\end{aligned}$$

すなわち, $(g \circ f)(x) = z$ である．よって, $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ である．したがって, 任意の $z \in Z$ に対して, $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ である．

以上より, 題意の等式がなりたつ．

8. まず, $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ であると仮定する．$x_1, x_2 \in V$, $f(x_1) = f(x_2)$ とすると, f は線形写像だから, $f(x_1 - x_2) = 0_W$ である．ただし, 0_W は W の零ベクトルを表す．ここで, 仮定より,

$$x_1 - x_2 = 0_V,$$

すなわち, $x_1 = x_2$ である．よって, f は単射である．

逆に, f が単射であると仮定する．$x \in \operatorname{Ker} f$ とすると, 核の定義および線形写像の性質より,

$$f(x) = f(0_V) = 0_W$$

である．ここで, 仮定より, $x = 0_V$ である．よって, $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ である．

したがって, $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ であることと f が単射であることは同値である．