§9. 同値関係

数学では元々は異なるものを同じものとみなして議論を進めることが多い. まず, 次の例から始めよう.

例 9.1 (有理数) 有理数とは整数と 0 ではない整数の比として表される数である. すなわち, $r \in \mathbf{Q}$ とすると, ある $m \in \mathbf{Z}$ および $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ が存在し, $r = \dfrac{m}{n}$ である. ただし, $m, m' \in \mathbf{Z}$ および $n, n' \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ を用いて表される 2 つの有理数 $\dfrac{m}{n}$ と $\dfrac{m'}{n'}$ は等式 $mn' = nm'$ がなりたつとき, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ であると定める.

そこで, 次のように定める.

定義 9.1 X を空でない集合とする.
任意の $(a, b) \in X \times X$ に対して, みたすかみたさないかを判定できる規則 R があたえられているとする. このとき, R を X 上の二項関係という. $(a, b) \in X \times X$ が R をみたすとき, aRb と表す.
$\sim$ を X 上の二項関係とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, $\sim$ を同値関係という. また, $a \sim b$ となる $a, b \in X$ に対して, a と b は同値であるという.

(1) 任意の $a \in X$ に対して, $a \sim a$ である. (反射律)
(2) 任意の $a, b \in X$ に対して, $a \sim b$ ならば, $b \sim a$ である. (対称律)
(3) 任意の $a, b, c \in X$ に対して, $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば, $a \sim c$ である. (推移律)

例 9.2 例 9.1 を定義 9.1 に沿ってもう一度考えてみよう.
集合 X を

$$X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$$

により定める. このとき, $(m, n), (m', n') \in X$ に対して, 等式 $mn' = nm'$ がなりたつとき, $(m, n) \sim (m', n')$ であると定める. $\sim$ が X 上の同値関係であることを示そう.
まず, $(m, n) \in X$ とする. このとき, $mn = nm$ だから, $\sim$ の定義より, $(m, n) \sim (m, n)$ である. よって, $\sim$ は反射律をみたす.
次に, $(m, n), (m', n') \in X$, $(m, n) \sim (m', n')$ とする. このとき, $\sim$ の定義より, $mn' = nm'$ である. よって, $m'n = n'm$ だから, $\sim$ の定義より, $(m', n') \sim (m, n)$ である. したがって, $\sim$ は対称律をみたす.
更に, $(m, n), (m', n'), (m'', n'') \in X$, $(m, n) \sim (m', n')$, $(m', n') \sim (m'', n'')$ とする. このとき, $\sim$ の定義より,

$$mn' = nm', \quad m'n'' = n'm'' \tag{$*$}$$

である. $(*)$ の 2 式を掛けると,

$$mn'm'n'' = nm'n'm''$$

である. ここで, $n' \neq 0$ だから,

$$mm'n'' = nm'm''$$

である. $m' \neq 0$ のとき, $mn'' = nm''$ である. また, $m' = 0$ のとき, $(*)$ および $n' \neq 0$ より, $m = m'' = 0$ だから, $mn'' = nm''$ である. よって, $\sim$ の定義より, $(m, n) \sim (m'', n'')$ である. したがって, $\sim$ は推移律をみたす.
以上より, $\sim$ は X 上の同値関係である.

その他の同値関係の例を幾つか挙げておこう.

例 9.3 (自明な同値関係) X を空でない集合とし, 任意の $a, b \in X$ に対して, $a \sim b$ であると定める. このとき, 明らかに $\sim$ は X 上の同値関係である. これを自明な同値関係という.

例 9.4 (相等関係) X を空でない集合とし, $a, b \in X$ に対して, $a = b$ のとき, $a \sim b$ であると定める. このとき, 明らかに $\sim$ は X 上の同値関係である. これを相等関係という.

例 9.5 (自然数を法とする合同関係) $n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, $k, l \in \mathbf{Z}$ に対して, k と l が n を法として合同なとき, すなわち, $k - l$ が n で割り切れるとき, $k \sim l$ であると定める. なお, この場合は $k \sim l$ であることを

$$k \equiv l \mod n$$

等と表すことが多い. $\sim$ が $\mathbf{Z}$ 上の同値関係であることを示そう.

まず, $k \in \mathbf{Z}$ とする. このとき, $k - k = 0$ であり, 0 は n で割り切れるから, $k \sim k$ である. よって, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $k, l \in \mathbf{Z}$, $k \sim l$ とする. このとき, $k - l$ は n で割り切れる. よって,

$$l - k = -(k - l)$$

は n で割り切れるから, $l \sim k$ である. したがって, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $k, l, m \in \mathbf{Z}$, $k \sim l$, $l \sim m$ とする. このとき, $k - l$ および $l - m$ は n で割り切れる. ここで,

$$k - m = (k - l) + (l - m)$$

だから, $k - m$ は n で割り切れる. よって, $k \sim m$ である. したがって, $\sim$ は推移律をみたす.

以上より, $\sim$ は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係である.

例 9.2 の同値関係から有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ を構成するように, 一般に, 同値関係のあたえられた集合から商集合という新たな集合を構成することができる. X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, $a \in X$ に対して, $C(a) \subset X$ を

$$C(a) = \{x \in X \mid a \sim x\}$$

により定める. $C(a)$ を $\sim$ による a の同値類, $C(a)$ の各元を $C(a)$ の代表元または代表という. $C(a)$ は $[a]$ 等と表すこともある. 同値類に関して, 次がなりたつ.

定理 9.1 X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) 任意の $a \in X$ に対して, $a \in C(a)$ である. 特に, $C(a) \neq \emptyset$ である.
(2) $a, b \in X$ とすると, 次の (a)〜(c) は互いに同値である.

(a) $a \sim b$.
(b) $C(a) = C(b)$.
(c) $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$.

証明 (1): 反射律より, 明らかである.
(2): (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a) の順に示す.

(a) $\Rightarrow$ (b): $C(a) \subset C(b)$ および $C(b) \subset C(a)$ を示せばよい. まず, $x \in C(a)$ とする. このとき, 同値類の定義より, $a \sim x$ である. また, 仮定および対称律より, $b \sim a$ である. よって, 推移律より, $b \sim x$ だから, 同値類の定義より, $x \in C(b)$ である. したがって, $C(a) \subset C(b)$ である.

次に, $x \in C(b)$ とする. このとき, 同値類の定義より, $b \sim x$ である. よって, 仮定および推移律より, $a \sim x$ だから, 同値類の定義より, $x \in C(a)$ である. したがって, $C(b) \subset C(a)$ である. 以上より, $C(a) = C(b)$ である.

(b) $\Rightarrow$ (c): 仮定および (1) より, 明らかである.

(c) $\Rightarrow$ (a): 仮定より, ある $c \in C(a) \cap C(b)$ が存在する. このとき, $c \in C(a)$ だから, 同値類の定義より, $a \sim c$ である. また, $c \in C(b)$ だから, 同値類の定義より, $b \sim c$ である. 更に, 対称律より, $c \sim b$ である. よって, 推移律より, $a \sim b$ である. □

X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, 定理 9.1 より, $\sim$ による同値類全体は X を互いに交わらない部分集合の和に分解する. そこで, $\sim$ による同値類全体の集合を $X/\sim$ と表し, $\sim$ による X の商集合という. このとき, X から $X/\sim$ への写像 $\pi : X \to X/\sim$ を

$$\pi(x) = C(x) \quad (x \in X)$$

により定める. π を自然な射影という. 明らかに, π は全射である.

例 9.6 例 9.2 において, $X/\sim = \mathbf{Q}$ である. この場合, $(m, n) \in X$ に対して, $C((m, n))$ は $\dfrac{m}{n}$ と表す. また, $\mathbf{Q}$ の元の代表としては規約分数を選ぶことが多い.

例 9.7 例 9.3 の自明な同値関係を考える. このとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ は

$$\pi(x) = X \quad (x \in X)$$

により定められる. よって, $X/\sim = \{X\}$, すなわち, $X/\sim$ は 1 点のみからなる集合である. 集合 $\{X\}$ は X という 1 つの集合を元とする集合であることに注意しよう.

例 9.8 例 9.4 の相等関係を考える. このとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ は

$$\pi(x) = \{x\} \quad (x \in X)$$

により定められる. よって,

$$X/\sim = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

であり, $X/\sim$ は π によって X 自身とみなすことができる.

例 9.9 例 9.5 の $n \in \mathbf{N}$ を法とする合同関係を考える. まず, 任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して, ある $q \in \mathbf{Z}$ および $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ が存在し,

$$k = qn + r$$

と表される. すなわち, q, r はそれぞれ k を n で割ったときの商, 余りである. このとき,

$$k \equiv r \mod n$$

だから, $\pi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/\sim$ を自然な射影とすると, $\pi(k) = C(r)$ である. よって,

$$\mathbf{Z}/\sim = \{C(0), C(1), C(2), \ldots, C(n-1)\},$$

すなわち, $\mathbf{Z}/\sim$ は n 個の元からなる集合である. 特に, $n = 2$ のとき, $\mathbf{Z}/\sim$ は偶数全体の集合と奇数全体の集合からなる.

問題 9

1. V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間, W を V の部分空間とする. $x, y \in V$ に対して, $x - y \in W$ のとき, $x \sim y$ であると定める.

(1) $\sim$ は V 上の同値関係であることを示せ.

(2) $x, x', y, y' \in V$ とする. $x \sim x'$, $y \sim y'$ ならば, $x + y \sim x' + y'$ であることを示せ.

(3) $\sim$ による $x \in V$ の同値類を $[x]$ と表し, V の $\sim$ による商集合を V/W と表す. このとき, (2) より, $[x], [y] \in V/W$ $(x, y \in V)$ に対して, $[x]$ と $[y]$ の和 $[x] + [y] \in V/W$ を

$$[x] + [y] = [x + y]$$

により定めることができる.
　任意の $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ に対して, 等式

$$[x] + [0] = [0] + [x] = [x]$$

がなりたつことを示せ.

(4) 任意の $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ に対して, 等式

$$[x] + [-x] = [-x] + [x] = [0]$$

がなりたつことを示せ.

(5) $x, x' \in V$, $c \in \mathbf{R}$ とする. $x \sim x'$ ならば, $cx \sim cx'$ であることを示せ. 特に, $[x] \in V/W$ $(x \in V)$, $c \in \mathbf{R}$ に対して, $[x]$ の c によるスカラー倍 $c[x] \in V/W$ を

$$c[x] = [cx]$$

により定めることができる. 更に, V/W は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる. V/W を W による V の商ベクトル空間または商空間という.

(6) $W = \{0\}$ のとき, V/W はどのようなベクトル空間であるか調べよ.

(7) $W = V$ のとき, V/W はどのようなベクトル空間であるか調べよ.

(8) V が有限次元であり, $W \neq \{0\}, V$ とする. このとき, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ を W の基底とし, $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の基底となるように選んでおく. $\{[v_{r+1}], [v_{r+2}], \ldots, [v_n]\}$ は V/W の基底であることを示せ. 特に, 等式

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

がなりたつ.

問題 9 の解答

1. (1) まず, $x \in V$ とする. W は V の部分空間だから,

$$x - x = 0 \in W,$$

すなわち, $x - x \in W$ である. よって, $x \sim x$ だから, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $x, y \in V$, $x \sim y$ とする. このとき, $x - y \in W$ であり, W は V の部分空間だから,

$$y - x = -(x - y) \in W,$$

すなわち, $y - x \in W$ である. よって, $y \sim x$ だから, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $x, y, z \in V$, $x \sim y$, $y \sim z$ とする. このとき, $x - y, y - z \in W$ であり, W は V の部分空間だから,

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in W,$$

すなわち, $x - z \in W$ である. よって, $x \sim z$ だから, $\sim$ は推移律をみたす.

したがって, $\sim$ は V 上の同値関係である.

(2) 仮定より, $x - x', y - y' \in W$ である. 更に, W は V の部分空間だから,

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in W,$$

すなわち, $(x + y) - (x' + y') \in W$ である. よって, $x + y \sim x' + y'$ である.

(3) 和の定義より,

$$\begin{aligned} [x] + [0] &= [x + 0] \\ &= [x], \end{aligned}$$

すなわち, 等式

$$[x] + [0] = [x]$$

がなりたつ. 同様に, 等式

$$[0] + [x] = [x]$$

がなりたつ. よって, 題意の等式がなりたつ.

(4) 和の定義より,

$$\begin{aligned} [x] + [-x] &= [x + (-x)] \\ &= [0], \end{aligned}$$

すなわち, 等式

$$[x] + [-x] = [0]$$

がなりたつ. 同様に, 等式

$$[-x] + [x] = [0]$$

がなりたつ. よって, 題意の等式がなりたつ.

(5) 仮定より, $x - x' \in W$ である. 更に, W は V の部分空間だから,

$$cx - cx' = c(x - x') \in W,$$

すなわち, $cx - cx' \in W$ である. よって, $cx \sim cx'$ である.

(6) $x, y \in V$ とする. $W = \{0\}$ のとき, $x \sim y$ となるのは $x - y = 0$ のとき, すなわち, $x = y$ のときである. よって, $\sim$ は V 上の相等関係であるから, 例 9.8 より, V/W は V 自身とみなすことができる.

(7) $W = V$ のとき, 任意の $x, y \in V$ に対して, $x - y \in W$, すなわち, $x \sim y$ である. よって, $\sim$ は V 上の自明な同値関係であるから, 例 9.7 より, V/W は 1 点のみからなる. したがって, V/W は零空間である.

(8) (3) より, V/W の零ベクトルは $[0]$ であることに注意する.

まず, $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ の 1 次関係

$$c_{r+1}[v_{r+1}] + c_{r+2}[v_{r+2}] + \cdots + c_n[v_n] = [0] \quad (c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$$

を考える. このとき, V/W の和およびスカラー倍の定義より,

$$[c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n] = [0]$$

だから,

$$c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n \in W$$

である. 更に, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ は W の基底だから, ある $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$c_{r+1}v_{r+1} + c_{r+2}v_{r+2} + \cdots + c_n v_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r,$$

すなわち,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r - c_{r+1}v_{r+1} - c_{r+2}v_{r+2} - \cdots - c_n v_n = 0$$

である. ここで, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は V の基底だから,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

である. したがって, $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ は自明な 1 次関係しかもたない.

次に, $[x] \in V/W$ $(x \in V)$ とする. このとき, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は V の基底だから, ある $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$x = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots + d_n v_n$$

である. ここで, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ は W の基底だから,

$$x - (d_{r+1}v_{r+1} + d_{r+2}v_{r+2} + \cdots + d_n v_n) = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots + d_r v_r \in W$$

である. よって,

$$x \sim d_{r+1}v_{r+1} + d_{r+2}v_{r+2} + \cdots + d_n v_n$$

だから, V/W の和およびスカラー倍の定義より,

$$[x] = d_{r+1}[v_{r+1}] + d_{r+2}[v_{r+2}] + \cdots + d_n[v_n]$$

である. したがって, V/W は $[v_{r+1}]$, $[v_{r+2}]$, $\ldots$, $[v_n]$ で生成される.

以上より, $\{[v_{r+1}], [v_{r+2}], \ldots, [v_n]\}$ は V/W の基底である.