§10. 群の作用

§8 では n 次直交群 $\mathrm{O}(n)$ が群であることを述べたが, $\mathrm{O}(n)$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ と組にして考えると, 次がなりたつ.

定理 10.1 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) 任意の $A, B \in \mathrm{O}(n)$ および任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $A(Bx) = (AB)x$ である.
(2) E を n 次単位行列とすると, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $Ex = x$ である.

そこで, 次のように定める.

定義 10.1 G を群, X を空でない集合, $\varphi : G \times X \to X$ を $G \times X$ から X への写像とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, G は X に左から作用するという.

(1) 任意の $a, b \in G$ および任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \varphi(ab, x)$ である.
(2) e を G の単位元とすると, 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi(e, x) = x$ である.

このとき, G を X の変換群, X を G 集合という. また, $\varphi(a, x)$ は ax とも表す.

注意 10.1 定義 10.1 において, 右からの作用についても定めることができる. 右からの作用の場合は ax の代わりに xa と表し, 例えば, (1) に対応する条件は $(xa)b = x(ab)$ である.

例 10.1 定理 10.1 より, $\mathrm{O}(n)$ は $\mathbf{R}^n$ に左から作用する. 同様に, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^n$ に左から作用する.

なお, $\mathbf{R}^n$ の元を行ベクトルとして表しておくと, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の元を $\mathbf{R}^n$ の元に右から掛けることにより, 右からの作用を定めることができる.

例 10.2 (自明な作用) G を群, X を空でない集合とする. このとき,

$$ax = x \quad ((a, x) \in G \times X)$$

とおくことにより, G は X に左から作用する. これを自明な作用という. 同様に, 右からの自明な作用を定めることができる.

例 10.3 (行列の基本変形) 行列に左から正則行列を掛けることは行に関する基本変形を何回か施すことに他ならないが, これを群の作用として見てみよう.

m 行 n 列の実行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と表す. このとき, $(P, X) \in \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}) \times M_{m,n}(\mathbf{R})$ に対して, $PX \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ を対応させることにより, $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ は $M_{m,n}(\mathbf{R})$ に左から作用する.

同様に, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_{m,n}(\mathbf{R})$ に右から作用する. これは列に関する基本変形を何回か施すことに対応する.

例 10.4 (線形変換の表現行列と基底変換) 有限次元ベクトル空間の線形変換は基底を選んでおくことにより, 表現行列という正方行列が対応するが, 基底を取り替えると, それに応じて表現行列も変わるのであった. このことを群の作用として見てみよう.

$(X, P) \in M_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ に対して, $P^{-1}XP \in M_n(\mathbf{R})$ を対応させる. ただし, $M_n(\mathbf{R})$ は n 次実行列全体の集合である. このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ に右から作用することを示そう. まず, $X \in M_n(\mathbf{R})$, $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ とすると,

$$Q^{-1}(P^{-1}XP)Q = (PQ)^{-1}X(PQ)$$

である. 次に,

$$E^{-1}XE = X$$

である. よって, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ に右から作用する.

なお, $(P,X)\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\times M_n(\mathbf{R})$ に対して, $PXP^{-1}\in M_n(\mathbf{R})$ を対応させると, $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ に左から作用する.

G を群, X を空でない集合とし, G が X に左から作用しているとする. このとき, $x\in X$ に対して, $Gx\subset X$ を

$$Gx=\{ax\,|\,a\in G\}$$

により定め, これを x の軌道という. 同様に, 右からの作用の場合も軌道を定めることができる. このときは, x の軌道を xG と表す. 軌道に関して, 次がなりたつ.

定理 10.2 G を群, X を空でない集合とし, G が X に左または右から作用しているとする. $x,y\in X$ に対して, x と y が同じ軌道の元であるとき, $x\sim y$ と表す. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\sim$ は X 上の同値関係である.
(2) 任意の $x\in X$ に対して, x の同値類は x の軌道に等しい.

証明 左からの作用の場合に示す. 右からの作用の場合も同様である.
(1): まず, $x\in X$ とする. このとき, 群の作用および軌道の定義より,

$$x=ex\in Gx,$$

すなわち, $x\in Gx$ である. よって, $x\sim x$ だから, 反射律がなりたつ.

また, $\sim$ の定義より, 対称律と推移律がなりたつことは明らかである.
(2): $C(x)\subset Gx$ および $Gx\subset C(x)$ を示せばよい.

まず, $y\in C(x)$ とする. このとき, 同値類および $\sim$ の定義より, x と y は同じ軌道の元である. ここで, $x\in Gx$ だから, $y\in Gx$ である. よって, $C(x)\subset Gx$ である.

次に, $y\in Gx$ とする. このとき, $x\in Gx$ だから, x と y は同じ軌道の元である. よって, $\sim$ の定義より, $x\sim y$ だから, 同値類の定義より, $y\in C(x)$ である. したがって, $Gx\subset C(x)$ である. □

定理 10.2 において, (2) より, $\sim$ による X の商集合 $X/\sim$ は X の軌道全体からなる集合となる. また, $X/\sim$ は左からの作用の場合は $G\backslash X$, 右からの作用の場合は X/G と表し, これらを G による X の商空間または商という. 特に, 軌道全体は X を互いに交わらない部分集合の和に分解する. この分解を X の軌道分解という.

例 10.5 例 10.1 で述べた $\mathrm{O}(n)$ の $\mathbf{R}^n$ への左からの作用を考える.

まず, 任意の $A\in\mathrm{O}(n)$ に対して, $A0=0$ だから, 0 の軌道は $\{0\}$ である.

次に, $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ を $a_1=\dfrac{x}{\|x\|}$ となるように選んでおくと, 定理 5.4 より, $P\in\mathrm{O}(n)$ を $P=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ により定めることができる. ここで, $P^{-1}P=E$ だから, $P^{-1}a_1$ は基本ベクトル e_1 である. よって,

$$P^{-1}x=\|x\|e_1$$

であり, $P^{-1}\in\mathrm{O}(n)$ だから, x と $\|x\|e_1$ は同じ軌道の元である.

したがって, $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して, x と y が同じ軌道の元となるのは $\|x\|=\|y\|$ のときである. また, $x\in\mathbf{R}^n$ の軌道の代表としては $\|x\|e_1$ を選ぶことができる.

例 10.6 G を群, X を空でない集合とし, G の X への自明な作用を考える. このとき, $x\in X$ の軌道は $\{x\}$ である. また, 同じ軌道であるという同値関係は相等関係である.

例 10.7　例 10.1 で述べた $\mathrm{SO}(n)$ の $\mathbf{R}^n$ への左からの作用を考える.
$n=1$ のとき, $\mathrm{SO}(1)=\{1\}$ だから, 作用は自明となり, $x \in \mathbf{R}$ の軌道は $\{x\}$ である.
$n \geq 2$ のときは例 10.5 と同様である.

例 10.8　例 10.1 で述べた $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^n$ への左からの作用を考える.
まず, 0 の軌道は $\{0\}$ である.
次に, $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ の基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $a_1 = x$ となるように選んでおくと, $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ により定めることができる. ここで, $P^{-1}P = E$ だから, $P^{-1}a_1 = e_1$ である. よって,

$$P^{-1}x = e_1$$

であり, $P^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ だから, x と e_1 は同じ軌道の元である.
したがって, $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して, x と y が同じ軌道の元となるのは $x = y = 0$ または $x, y \neq 0$ のときである. また, $x \neq 0$ のとき, $x \in \mathbf{R}^n$ の軌道の代表としては e_1 を選ぶことができる.

例 10.9　例 10.1 で述べた $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の $\mathbf{R}^n$ への左からの作用を考える.
$n=1$ のとき, $\mathrm{SL}(1, \mathbf{R}) = \{1\}$ だから, 作用は自明となり, $x \in \mathbf{R}$ の軌道は $\{x\}$ である.
$n \geq 2$ のときは例 10.8 と同様である.

例 10.10　例 10.3 で述べた $\mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$ の $M_{m,n}(\mathbf{R})$ への左からの作用を考える. 行に関する基本変形を考えることにより, 軌道の代表としては階数標準形や階段行列を選ぶことができる. 特に, $X, Y \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ に対して, X と Y が同じ軌道の元となるのは

$$\mathrm{rank}\, X = \mathrm{rank}\, Y$$

のときである.

例 10.11　例 10.4 で述べた $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の $M_n(\mathbf{R})$ への右からの作用を考える. $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, X が対角化可能なとき, X の軌道の代表としては対角行列を選ぶことができる. 特に, $X, Y \in M_n(\mathbf{R})$ であり, X と Y がともに対角化可能なとき, X と Y が同じ軌道の元となるのは X, Y の固有値が一致するときである.
なお, 実際には対角化可能ではない正方行列も存在するため, この作用については, 数を複素数の範囲まで拡げ, Jordan 標準形というものを考えた方が見通しがよい.

例 10.12　実対称行列の固有方程式の解はすべて実数であり, 実対称行列は直交行列によって対角化可能である. このことを群の作用として見てみよう.
$(X, P) \in \mathrm{Sym}(n) \times \mathrm{O}(n)$ に対して, $P^{-1}XP \in \mathrm{Sym}(n)$ を対応させることができる. ただし, $\mathrm{Sym}(n)$ は n 次実対称行列全体の集合である. $P^{-1} = {}^tP$ であることに注意しよう. このとき, 例 10.4 と同様に, $\mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{Sym}(n)$ に右から作用する.
$X \in \mathrm{Sym}(n)$ とすると, X は直交行列によって対角化可能だから, X の軌道の代表としては対角行列を選ぶことができる. 特に, $X, Y \in \mathrm{Sym}(n)$ に対して, X と Y が同じ軌道の元となるのは X, Y の固有値が一致するときである. 更に, 実対称行列の固有方程式の解はすべて実数だから, 各実対称行列に対して, その固有値を小さい順に並べたものを対応させると, $\mathrm{Sym}(n)/\mathrm{O}(n)$ は集合

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R},\ x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$$

とみなすことができる.

問題 10

1. X を実数を係数とする $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の多項式全体の集合とし, $(\sigma, f) \in S_n \times X$ に対して, $\sigma f \in X$ を

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

により定める. このとき, (σ, f) から σf への対応は S_n の X への左からの作用を定めることを示せ.

2. G を群, X を空でない集合とし, G が X に左から作用しているとする. このとき, $a \in G$ に対して, X から X への写像 $\varphi(a) : X \to X$ を

$$\varphi(a)(x) = ax \quad (x \in X)$$

により定める.

(1) 任意の $a \in G$ に対して, $\varphi(a)$ は全射であることを示せ.

(2) 任意の $a \in G$ に対して, $\varphi(a)$ は単射であることを示せ.

(3) X から X への全単射全体の集合を $S(X)$ と表す. このとき, $S(X)$ は写像の合成に関して群となる. また, (1), (2) より, 任意の $a \in G$ に対して, $\varphi(a) \in S(X)$ である. 任意の $a, b \in G$ に対して, 等式

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

がなりたつことを示せ.

(4) $\psi : G \to S_n(X)$ を G から $S_n(X)$ への写像とし, 任意の $a, b \in G$ に対して, 等式

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

がなりたつと仮定する. このとき, $(a, x) \in G \times X$ に対して, $(\psi(a))(x) \in X$ を対応させると, G は X に左から作用することを示せ.

3. G を群, X を空でない集合とし, G が X に左から作用しているとする. このとき, $x \in X$ に対して, $G_x \subset G$ を

$$G_x = \{a \in G \,|\, ax = x\}$$

により定める. G_x は G の部分群であることを示せ. なお, G_x を x の固定化部分群という.

問題 10 の解答

1. まず, $\sigma, \tau \in S_n$, $f \in X$ とすると,

$$\begin{aligned}((\sigma\tau)f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, x_{(\sigma\tau)^{-1}(2)}, \dots, x_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) \\ &= f(x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}, x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(2))}, \dots, x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))}) \\ &= (\tau f)(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= (\sigma(\tau f))(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

すなわち,

$$((\sigma\tau)f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sigma(\tau f))(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

である. よって, $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$ だから, 定義 10.1 の (1) の条件がなりたつ.

次に, $\varepsilon \in S_n$ を恒等置換, $f \in X$ とすると, 明らかに, $\varepsilon f = f$ である. よって, 定義 10.1 の (2) の条件がなりたつ.

したがって, (σ, f) から σf への対応は S_n の X への左からの作用を定める.

2. (1) $x \in X$ とすると, φ および群の作用の定義より,

$$\begin{aligned}\varphi(a)(a^{-1}x) &= a(a^{-1}x) \\ &= (aa^{-1})x \\ &= ex \\ &= x,\end{aligned}$$

すなわち, $\varphi(a)(a^{-1}x) = x$ である. よって, $\varphi(a)$ は全射である.

(2) $x, y \in X$, $\varphi(a)(x) = \varphi(a)(y)$ とすると, φ の定義より, $ax = ay$ である. よって, 群の作用の定義より,

$$\begin{aligned}x &= ex \\ &= (a^{-1}a)x \\ &= a^{-1}(ax) \\ &= a^{-1}(ay) \\ &= y,\end{aligned}$$

すなわち, $x = y$ である. したがって, $\varphi(a)$ は単射である.

(3) $x \in X$ とすると, φ, 群の作用および $S(X)$ における積の定義より,

$$\begin{aligned}\varphi(ab)(x) &= (ab)x \\ &= a(bx) \\ &= a(\varphi(b)(x)) \\ &= \varphi(a)(\varphi(b)(x)) \\ &= (\varphi(a)\varphi(b))(x),\end{aligned}$$

すなわち,

$$\varphi(ab)(x) = \varphi(a)\varphi(b)(x)$$

である．よって, 題意の等式がなりたつ.

(4) まず, $a, b \in G$, $x \in X$ とすると, 仮定より,

$$
\begin{aligned}
a(bx) &= a((\psi(b))(x)) \\
&= (\psi(a))((\psi(b))(x)) \\
&= (\psi(a)\psi(b))(x) \\
&= (\psi(ab))(x) \\
&= (ab)x,
\end{aligned}
$$

すなわち, $a(bx) = (ab)x$ である．よって, 定義 10.1 の (1) の条件がなりたつ.

次に, 仮定の等式において, $a = b = e$ とおく．このとき, $ee = e$ だから,

$$
\psi(e) = \psi(e)\psi(e)
$$

となり, 両辺に右または左から $\psi(e)^{-1}$ を掛けると, $\psi(e) = 1_X$ である．よって, $x \in X$ とすると,

$$
\begin{aligned}
ex &= (\psi(e))(x) \\
&= 1_X(x) \\
&= x,
\end{aligned}
$$

すなわち, $ex = x$ である．したがって, 定義 10.1 の (2) の条件がなりたつ.

以上より, G は X に左から作用する.

3. まず, $a, b \in G_x$ とすると,

$$
\begin{aligned}
(ab)x &= a(bx) \\
&= ax \\
&= x,
\end{aligned}
$$

すなわち, $(ab)x = x$ である．よって, $ab \in G_x$ である.

次に, 群の作用の定義より, $e \in G_x$ である.

更に, $a \in G_x$ とすると, $ax = x$ だから, 群の作用の定義より,

$$
\begin{aligned}
a^{-1}x &= a^{-1}(ax) \\
&= (a^{-1}a)x \\
&= ex \\
&= x,
\end{aligned}
$$

すなわち, $a^{-1}x = x$ である．よって, $a^{-1} \in G_x$ である.

したがって, G_x は G の部分群である.