§11. 2 次超曲面

実数を係数とする未知変数 x についての 2 次方程式は

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

と表すことができる．ただし, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ である．$b^2 - ac < 0$ のとき, 上の方程式の解は複素数の範囲で考えなければ存在しないが, $b^2 - ac \geq 0$ のとき, 上の方程式の実数解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

と具体的に求めることができる．しかし, 未知変数の個数が増えると, 2 次方程式の解を具体的に表すことはできなくなってしまう．ここでは, 未知変数が n 個の 2 次方程式を $\mathbf{R}^n$ 内の図形とみなすことによって調べていこう．

実数を係数とする未知変数 x_1, x_2, $\dots$, x_n についての 2 次方程式は

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \cdots + 2b_nx_n + c = 0$$

と表すことができる．ただし,

$$a_{ij}, b_i, c \in \mathbf{R}, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

であり, a_{11}, a_{12}, $\dots$, a_{nn} の内の少なくとも 1 つは 0 ではない．x_ix_j と x_jx_i は同類項なので, 上の第 2 式のように仮定してもよいことに注意しよう．このとき, $A \in \mathrm{Sym}(n)$ および $b, x \in \mathbf{R}^n$ を

$$A = (a_{ij}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

により定めることができる．また, A は零行列ではない, すなわち, $A \neq O$ である．よって, 上の 2 次方程式は行列の積を用いて,

$$ {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \tag{1}$$

と表すことができる．そこで, (1) をみたす $x \in \mathbf{R}^n$ 全体の集合を考えよう．すなわち,

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid {}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0\}$$

である．これを 2 次超曲面という．また, 2 次方程式 (1) 自身のことも 2 次超曲面という．なお, 2 次超曲面は $n = 2$ のときは 2 次曲線, $n = 3$ のときは 2 次曲面という．

例 11.1 (楕円)　$a, b > 0$ とする．このとき, 未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は楕円を表す 2 次曲線である．

例 11.2 (双曲線)　$a, b > 0$ とする．このとき, 未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は双曲線を表す 2 次曲線である.

例 11.3 (放物線) $a > 0$ とする. このとき, 未知変数 x, y についての 2 次方程式

$$x^2 = 2ay$$

は放物線を表す 2 次曲線である.

例 11.4 (球面) $r > 0$ とする. このとき, 未知変数 x, y, z についての 2 次方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

は球面を表す 2 次曲面である.

さて, §6 で述べたように, $\mathbf{R}^n$ に対しては等長変換という Euclid 距離を保つ全単射を考えることができるのであった. まず, 次がなりたつ.

定理 11.1 $\mathbf{R}^n$ の等長変換は $\mathbf{R}^n$ 内の 2 次超曲面を $\mathbf{R}^n$ 内の 2 次超曲面へ写す.

証明 $\mathbf{R}^n$ の等長変換が行列を用いて表されることから, ほとんど明らかであるが, 後のために具体的に計算しておくことにする.

$f \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき, $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ であり, $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $y = f(x)$ とおくと, $x = f^{-1}(y)$ である. これを (1) に代入すると,

$$^t(f^{-1}(y))Af^{-1}(y) + 2{}^tbf^{-1}(y) + c = 0$$

である. ここで, 定理 6.2 より, ある $P \in \mathrm{O}(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し,

$$f^{-1}(y) = Py + q$$

である. これを上の式に代入すると,

$$^t(Py + q)A(Py + q) + 2{}^tb(Py + q) + c = 0$$

である. 更に, ${}^tA = A$ であることと 1 次行列は転置を取っても変わらないことに注意すると,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ({}^ty{}^tP + {}^tq)(APy + Aq) + 2{}^tbPy + 2{}^tbq + c \\
&= {}^ty({}^tPAP)y + {}^ty{}^tPAq + {}^tqAPy + {}^tqAq + 2{}^tbPy + 2{}^tbq + c \\
&= {}^ty({}^tPAP)y + {}^t({}^ty{}^tPAq) + {}^tqAPy + {}^tqAq + 2{}^tbPy + 2{}^tbq + c \\
&= {}^ty({}^tPAP)y + 2{}^tqAPy + 2{}^tbPy + {}^tqAq + 2{}^tbq + c \\
&= {}^ty({}^tPAP)y + 2{}^t(Aq + b)Py + {}^tqAq + 2{}^tbq + c
\end{aligned}$$

だから,

$$ {}^ty({}^tPAP)y + 2{}^t(Aq + b)Py + {}^tqAq + 2{}^tbq + c = 0 \tag{2}$$

である. このとき, P は正則であり, $A \in \mathrm{Sym}(n)$, $A \neq O$ だから, ${}^tPAP \in \mathrm{Sym}(n)$, ${}^tPAP \neq O$ であり, (2) は 2 次超曲面を表す. よって, $\mathbf{R}^n$ の等長変換は $\mathbf{R}^n$ 内の 2 次超曲面を $\mathbf{R}^n$ 内の 2 次超曲面へ写す. □

1 変数の 2 次方程式とは異なり, 2 変数以上の 2 次方程式については, (1) がどのような $\mathbf{R}^n$ の部分集合を表すのかは一般には判別し難い. そこで, Euclid 空間の等長変換で写り合う 2 次超曲面は同じものであるとみなして, (1) を例 11.1〜例 11.4 で表したような理解しやすい形に変形

することを考えよう．なお, §7 で述べたことより, 2 次超曲面を Euclid 空間の等長変換で写すとは, 回転, 鏡映, 平行移動といった操作を何回か施すことを意味する．また, このことは群の作用として次のように述べることができる.

定理 11.2　集合 X を

$$X = \{\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \,|\, \Phi \text{ は成分の 2 次多項式で表される} \}$$

により定め, $(f, \Phi) \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n) \times X$ に対して,

$$(f\Phi)(x) = \Phi(f^{-1}(x)) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

とおく．このとき, (f, Φ) から $f\Phi$ への対応は $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ の X への左からの作用を定める.

証明　まず, 定理 11.1 の証明より, $f\Phi \in X$ である.

更に, $g \in \mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ とすると,

$$\begin{aligned}(f(g\Phi))(x) &= (g\Phi)(f^{-1}(x)) \\ &= \Phi(g^{-1}(f^{-1}(x))) \\ &= \Phi((g^{-1} \circ f^{-1})(x)) \\ &= \Phi((f \circ g)^{-1}(x)) \\ &= ((f \circ g)\Phi)(x),\end{aligned}$$

すなわち,

$$(f(g\Phi))(x) = ((f \circ g)\Phi)(x)$$

である．よって,

$$f(g\Phi) = (f \circ g)\Phi$$

だから, 定義 10.1 の (1) の条件がなりたつ.

また,

$$\begin{aligned}(1_{\mathbf{R}^n}\Phi)(x) &= \Phi({1_{\mathbf{R}^n}}^{-1}(x)) \\ &= \Phi(x),\end{aligned}$$

すなわち,

$$(1_{\mathbf{R}^n}\Phi)(x) = \Phi(x)$$

である．よって,

$$1_{\mathbf{R}^n}\Phi = \Phi$$

だから, 定義 10.1 の (2) の条件がなりたつ.

したがって, (f, Φ) から $f\Phi$ への対応は $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^n)$ の X への左からの作用を定める. □

更に, (1) を理解しやすい形に変形するという問題は, 定理 11.2 のように群の作用の立場から捉えると, 各軌道の中から理解しやすい代表を選ぶことであるということができる.

問題 11

1. 2 次超曲面
$$ {}^t xAx + 2{}^t bx + c = 0 \tag{$*$} $$
を考える．ただし，$A \in \mathrm{Sym}(n)$, $A \neq O$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ である．

(1) A が正則ならば，ある $P \in \mathrm{O}(n)$ および $q \in \mathbf{R}^n$ が存在し，
$$ x = Py + q $$
とおくと，$(*)$ は
$$ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 $$
と表されることを示せ．ただし，λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n は重複度も込めた A の固有値であり，
$$ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} $$
である．

(2) $n = 2$ のとき，$(*)$ が楕円を表すための条件を (1) の λ_1, λ_2, $|A|$, $|\tilde{A}|$ を用いて表せ．

(3) $n = 2$ のとき，$(*)$ が双曲線を表すための条件を (1) の λ_1, λ_2, $|A|$, $|\tilde{A}|$ を用いて表せ．

(4) $n = 3$ のとき，$(*)$ が球面を表すための条件を (1) の λ_1, λ_2, λ_3, $|A|$, $|\tilde{A}|$ を用いて表せ．

問題 11 の解答

1. (1) $P \in \mathrm{O}(n)$, $q \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$x = Py + q$$

とおき, これを $(*)$ に代入すると, 定理 11.1 の証明の計算より,

$$^t y(^t PAP)y + 2^t(Aq+b)Py + {}^t qAq + 2^t bq + c = 0 \tag{a}$$

である.

仮定より, A は正則だから, A^{-1} が存在し, $q = -A^{-1}b$ とすると,

$$Aq + b = 0 \tag{b}$$

である. 更に, 対称行列は直交行列によって対角化可能だから, P を

$$^t PAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるように選んでおくことができる. このとき, (a) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + {}^t qAq + 2^t bq + c = 0 \tag{c}$$

となる. ここで, (b) より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & Aq+b \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix}$$

である. よって, 両辺の行列式を取ると, 行列式の性質より,

$$|\tilde{A}| = |A|(^t bq + c)$$

である. 更に, A は正則だから, $|A| \neq 0$ であり,

$$^t bq + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|} \tag{d}$$

である. したがって, $A \in \mathrm{Sym}(n)$ であることと (b), (d) より,

$$\begin{aligned} {}^t qAq + 2^t bq + c &= {}^t(Aq)q + 2^t bq + c \\ &= {}^t(-b)q + 2^t bq + c \\ &= {}^t bq + c \\ &= \frac{|\tilde{A}|}{|A|}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$ {}^t qAq + 2{}^t bq + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|} $$

である. これを (c) に代入すると,

$$ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 \tag{e} $$

となる.

(2) (e) において, $n = 2$ とすると,

$$ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 \tag{f} $$

である. (f) を楕円を表す方程式

$$ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0) $$

と比べると, 求める条件は $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\dfrac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0$ または $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\dfrac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0$ である.

(3) (f) を双曲線を表す方程式

$$ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0) $$

と比べると, 求める条件は $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $\dfrac{|\tilde{A}|}{|A|} \neq 0$ である.

(4) (e) において, $n = 3$ とすると,

$$ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 $$

である. これを球面を表す方程式

$$ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (r > 0) $$

と比べると, 求める条件は

$$ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0, \quad \frac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0 $$

または

$$ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < 0, \quad \frac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0 $$

である.