§1. ベクトル値関数

以下では, n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の元は n 個の実数を横に並べたものとして表すことにする. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である.

微分積分では主に $\mathbf{R}$ に値をとる関数，すなわち，実数値関数を扱った. 簡単のため, 以下では区間を定義域とする 1 変数の場合を扱うことにしよう. すると, $\mathbf{R}$ に値をとる関数とは区間から $\mathbf{R}$ への写像のことである. ここでは, n を 2 以上の自然数とし, 区間から $\mathbf{R}^n$ への写像, すなわち, ベクトル値関数を考えよう. なお, ベクトル値関数と対比させて, $\mathbf{R}$ に値をとる関数をスカラー値関数ともいう.

まず, I を区間とし, f を I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の関数 f_1, f_2, $\ldots$, f_n を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \quad (t \in I) \tag{$*$}$$

と表すことができる.

次に, g も I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であるから, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $f+g$ を

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \ldots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, c を I で定義されたスカラー値関数とすると, $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = c(t)f(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \ldots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考える. このとき, I で定義されたスカラー値関数 $\langle f, g\rangle$ を

$$\langle f, g\rangle(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\,{}^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, $\mathbf{R}^n$ の標準内積から定まるノルム $\|\ \|$ を用いて, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

$\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数に対しては外積というものを考えることができる. まず, $\mathbf{R}^3$ の外積について述べておこう. $a, b \in \mathbf{R}^3$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする. このとき, a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルであると定め, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定める.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向きである. ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

e_1, e_2, e_3 を $\mathbf{R}^3$ の基本ベクトルとする．すなわち，

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

である．よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと，

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$**$}$$

がなりたつ．また，次が成り立つ．

定理 1.1　$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とすると，次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると，$(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

$a, b \in \mathbf{R}^3$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表すことができる．このとき，定理 1.1 および $(**)$ より，

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

となる．

さて，f, g を区間 I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数としよう．このとき，I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる．

再び，f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数としよう．f が $(*)$ のように表されているとき，各 f_1, f_2, $\ldots$, f_n が I で微分可能ならば，f は I で微分可能であるという．このとき，I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)) \quad (t \in I)$$

により定め，f' を f の微分という．すなわち，ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよい．ベクトル値関数の微分に関して，次がなりたつ．

定理 1.2　f, g を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると，次の (1)〜(4) がなりたつ．
(1) $(f+g)' = f' + g'$.
(2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると，$(cf)' = c'f + cf'$.
(3) $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.
(4) $n = 3$ のとき，$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

証明　(1): 成分毎に考え，微分の線形性を用いればよい．
(2): 成分毎に考え，積の微分法を用いればよい．
(3): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくと,

$$
\begin{aligned}
\langle f,g\rangle'(t) &= \langle f(t),g(t)\rangle' \\
&= (f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+\cdots+f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1(t)g_1(t))'+(f_2(t)g_2(t))'+\cdots+(f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1'(t)g_1(t)+f_1(t)g_1'(t))+(f_2'(t)g_2(t)+f_2(t)g_2'(t))+\cdots+(f_n'(t)g_n(t)+f_n(t)g_n'(t)) \\
&= f_1'(t)g_1(t)+f_2'(t)g_2(t)+\cdots+f_n'(t)g_n(t)+f_1(t)g_1'(t)+f_2(t)g_2'(t)+\cdots+f_n(t)g_n'(t) \\
&= \langle f'(t),g(t)\rangle+\langle f(t),g'(t)\rangle \\
&= \langle f',g\rangle(t)+\langle f,g'\rangle(t) \\
&= \left(\langle f',g\rangle+\langle f,g'\rangle\right)(t)
\end{aligned}
$$

である. よって, (3) がなりたつ.
(4): 成分毎に考えればよい. □

ベクトル値関数の積分についても考えよう. f を閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\dots,f_n(t))\quad(t\in[a,b])$$

と表しておく. 各 f_1, f_2, $\dots$, f_n が $[a,b]$ で積分可能なとき, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\in\mathbf{R}^n$ を

$$\int_a^b f(t)\,dt=\left(\int_a^b f_1(t)\,dt,\int_a^b f_2(t)\,dt,\dots,\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

により定め, これを f の $[a,b]$ における定積分という. このとき, f は $[a,b]$ で積分可能であるという. スカラー値関数の定積分の場合と同様に, ベクトル値関数の定積分は線形性をもつ. すなわち, 次がなりたつ.

定理 1.3 f, g を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt.$

(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int_a^b (cf)(t)\,dt=c\int_a^b f(t)\,dt.$

f を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 F を

$$F(t)=\int_a^t f(s)\,ds\quad(t\in[a,b])$$

により定める. これを f の不定積分という. 微分積分学の基本定理より,

$$F'(t)=f(t)\quad(t\in[a,b])$$

がなりたち, 更に,

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

がなりたつ.

問題 1

1. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2), \quad g(t) = (t^3, t^4) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $\langle f, g' \rangle$ を求めよ.
(2) $\displaystyle\int_0^1 \|f\|(t)\,dt$ を求めよ.
(3) $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(t)\,dt$ を求めよ.

2. $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
(1) $f \times f'$ を求めよ.
(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ.

3. f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ.

4. f を区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ.

5. f を区間 I で定義された 2 回微分可能な $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. I で定義されたスカラー値関数 c が存在し, 任意の $t \in I$ に対して,

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち, t に依存しないベクトルであることを示せ.

問題 1 の解答

1. (1) まず,

$$g'(t) = (3t^2, 4t^3)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\langle f, g'\rangle(t) &= \langle f(t), g'(t)\rangle \\ &= \langle (t, t^2), (3t^2, 4t^3)\rangle \\ &= t\cdot 3t^2 + t^2\cdot 4t^3 \\ &= 3t^3 + 4t^5\end{aligned}$$

である.

(2) $t \in [0, 1]$ のとき,

$$\begin{aligned}\|f\|(t) &= \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|f\|(t)dt &= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\end{aligned}$$

である.

(3) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f+g)(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= \left(\int_0^1 t\,dt, \int_0^1 t^2\,dt\right) + \left(\int_0^1 t^3\,dt, \int_0^1 t^4\,dt\right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1, \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right) + \left(\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1, \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{15}\right)\end{aligned}$$

である.

2. (1) まず,

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}(f\times f')(t) &= (t, t^2, t^3)\times(1, 2t, 3t^2) \\ &= (t^2\cdot 3t^2 - t^3\cdot 2t, t^3\cdot 1 - t\cdot 3t^2, t\cdot 2t - t^2\cdot 1) \\ &= (t^4, -2t^3, t^2)\end{aligned}$$

である.

(2) (1) の計算より,

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= (1', (2t)', (3t^2)') \\
&= (0, 2, 6t)
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\begin{aligned}
\langle f \times f', f'' \rangle(t) &= \langle (t^4, -2t^3, t^2), (0, 2, 6t) \rangle \\
&= t^4 \cdot 0 + (-2t^3) \cdot 2 + t^2 \cdot 6t \\
&= 2t^3
\end{aligned}
$$

である.

3. まず,

$$
\begin{aligned}
\left(\|f\|^2\right)' &= \langle f, f \rangle' \\
&= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\
&= 2\langle f, f' \rangle
\end{aligned}
$$

である. 仮定より, $\|f\|^2$ は $t = t_0$ で最大または最小となるから,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \|f\|^2 \\
&= 2\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle
\end{aligned}
$$

である. よって,

$$
\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle = 0,
$$

すなわち, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する.

4. まず, $\|f\|$ が定数関数であると仮定する. このとき, $\|f\|^2$ も定数関数だから,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\|f\|^2\right)' \\
&= 2\langle f, f' \rangle
\end{aligned}
$$

である. よって, 任意の $t \in I$ に対して

$$
\langle f(t), f'(t) \rangle = 0,
$$

すなわち, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交する.

上の計算は逆に辿ることもできるから, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交すると仮定すると, $\|f\|$ は定数関数である.

5. 仮定より,

$$
\begin{aligned}
(f \times f')' &= f' \times f' + f \times f'' \\
&= 0 + f \times (cf) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である. よって, $f \times f'$ の各成分は定数となるから, $f \times f'$ は定ベクトルである.