

§4. 解の存在と一意性

微分方程式はいつでも解が具体的に求められるとは限らないし、そもそも解が存在しない場合もある。ここでは正規形の微分方程式を考え、初期値問題の解の存在と一意性について述べよう。 $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $r, R > 0$ とし、 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$D = \{(t, x) \mid t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, |t - t_0| \leq r, \|x - x_0\| \leq R\}$$

により定める。 $f(t, x)$ を D で定義された \mathbf{R}^n に値をとる関数とし、微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

を考える。初期値問題とは (*) の第1式の微分方程式に、更に第2式の条件を付け加えたものである。この第2式を初期条件という。初期値問題 (*) の解の存在については次が最も基本的である。証明には位相空間論で扱う Ascoli-Arzelà の定理を用いる。

定理 4.1 (Cauchy-Peano の存在定理) f が D で連続ならば、

$$M = \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|, \quad \delta = \min \left\{ r, \frac{R}{M} \right\}$$

とおくと、閉区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で定義された (*) の解が存在する。

定理 4.1 における解を局所解という。これに対して区間 $[t_0 - r, t_0 + r]$ で定義された解を大域解という。

解の一意性も保証する定理については次が基本的である。証明には完備距離空間に対する縮小写像の原理を用いる。

定理 4.2 (Picard-Lindelöf の定理) f が D で連続であり、更にある定数 L が存在し、任意の $(t, x), (t, y) \in D$ に対して

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

がなりたつならば、(*) の局所解が一意的に存在する。

定理 4.2 の不等式を Lipschitz 条件、 L を Lipschitz 定数という。Lipschitz 条件については、問題 4.1 も見るとよい。定理 4.2 を用いることにより、次のような線形微分方程式に対する大域解の存在と一意性がなりたつことが分かる。

定理 4.3 I を区間、 A を I で連続な n 次実正方行列に値をとる関数、 b を I で連続な \mathbf{R}^n に値をとる関数とし、 $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ とする。このとき、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xA(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の大域解、すなわち、 I で定義された解が一意的に存在する。

解の存在と一意性に関連する例を幾つか挙げよう。

例 4.1 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える. $(t, x) = (0, 1)$ の近くで関数 tx は Lipschitz 条件をみたすことが分かるから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する. また, この微分方程式は線形でもある.

$t = 0$ の近くで $x(t)$ は 1 に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t t dt$$

となる. よって,

$$[\log x]_1^{x(t)} = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^t$$

である. したがって,

$$\log x(t) = \frac{1}{2} t^2,$$

すなわち,

$$x(t) = e^{\frac{1}{2} t^2}$$

である. 特に, 関数 tx の定義域をどのように考えても, $x(t)$ は大域解である.

次の例に見られるように, (*) における $f(t, x)$ の定義域 D によっては, 局所解は存在しても大域解は存在しない場合がある.

例 4.2 (解の爆発) $a > 0$ とし, 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, \\ x(0) = a \end{cases}$$

を考える. $(t, x) = (0, a)$ の近くで関数 x^2 は Lipschitz 条件をみたすことが分かるから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する.

$t = 0$ の近くで $x(t)$ は a に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt$$

となる. よって,

$$\left[-\frac{1}{x} \right]_a^{x(t)} = [t]_0^t$$

である. したがって,

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{a} = t,$$

すなわち,

$$x(t) = \left(\frac{1}{a} - t \right)^{-1}$$

である. 特に, $x(t)$ は区間 $[0, \frac{1}{a})$ で定義されるが,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{a} - 0} x(t) = +\infty$$

である. このようなとき, 解は爆発するという.

次は解の一意性がなりたたない例を挙げよう.

例 4.3 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

を考える. $(t, x) = (0, 0)$ の近くで関数 $\sqrt{|x|}$ は連続だから, 解 $x(t)$ は存在する.

まず, $x(t) = 0$ は解である.

また,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x}} = \pm 2\sqrt{\pm x} \quad (\text{複号同順})$$

だから,

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2 & (t \leq 0), \\ \frac{1}{4}t^2 & (t > 0) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解である.

更に, $t_1 \leq 0 \leq t_2$ とし,

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - t_1)^2 & (t \leq t_1), \\ 0 & (t_1 < t \leq t_2), \\ \frac{1}{4}(t - t_2)^2 & (t > t_2) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解である.

定理 4.3, すなわち, 線形微分方程式の解の存在と一意性を用いて, 指数関数や三角関数を定義することができる.

例 4.4 (指数関数) 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える. 定理 4.3 より, \mathbf{R} 全体で定義された解 $x(t)$ が一意的に存在する. この解が指数関数 e^t である.

例 4.5 (三角関数) 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

を考える. 定理 4.3 より, \mathbf{R} 全体で定義された解 $(x(t), y(t))$ が一意的に存在する. この解が三角関数の組 $(\cos t, \sin t)$ である.

問題 4

1. $t_0, x_0 \in \mathbf{R}$, $r, R > 0$ とし, $D \subset \mathbf{R}^2$ を

$$D = \{(t, x) \mid t, x \in \mathbf{R}, |t - t_0| \leq r, |x - x_0| \leq R\}$$

により定める. D で定義された関数 $f(t, x)$ が x に関して連続微分可能, すなわち, D で定義された偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ が存在し, 更に $\frac{\partial f}{\partial x}$ が D で連続であるとする. このとき, $f(t, x)$ は Lipschitz 条件をみたすことを示せ.

2. 微分方程式の解の一意性を用いることにより, 指数法則

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

を示せ.

3. 微分方程式の解の一意性を用いることにより, 三角関数に対する加法公式

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

を示せ.

4. 双曲線関数 $\cosh t$ および $\sinh t$ を線形微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

の解 $(x(t), y(t))$ を用いて,

$$x(t) = \cosh t, \quad y(t) = \sinh t$$

により定める. 微分方程式の解の一意性を用いることにより, 等式

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

を示せ.

問題 4 の解答

1. 仮定より, 関数 $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ は D で連続である. 更に, Euclid 空間の有界閉集合で定義された連続関数は最大値をもつから, 定数

$$L = \max_{(t,x) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$$

が存在する. このとき, $(t, x_1), (t, x_2) \in D$ とすると,

$$\begin{aligned} f(t, x_1) - f(t, x_2) &= [f(t, x_2 + s(x_1 - x_2))]_{s=0}^{s=1} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) \frac{\partial \{x_2 + s(x_1 - x_2)\}}{\partial s} ds \\ &= \int_0^1 (x_1 - x_2) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \\ &= (x_1 - x_2) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) \right| ds \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 L ds \\ &\leq L|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

となる. したがって, $f(t, x)$ は Lipschitz 条件をみたす.

2. 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = e^\beta \end{cases}$$

を考える. このとき, $e^{t+\beta}$ および $e^t e^\beta$ はともに解である. よって, 微分方程式の解の一意性より,

$$e^{t+\beta} = e^t e^\beta$$

である. $t = \alpha$ とおくと, 指数法則が得られる.

3. 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (\cos \beta, \sin \beta) \end{cases}$$

を考える. まず,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) &= (-\sin(t + \beta), \cos(t + \beta)) \\ &= (\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta) \\ &= (-\sin t \cos \beta - \cos t \sin \beta, \cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta) \\ &= (\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. 更に,

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$$

である. よって,

$$(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta))$$

および

$$(\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta)$$

はともに上の初期値問題の解である. したがって, 微分方程式の解の一意性より,

$$(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) = (\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta)$$

である. $t = \alpha$ とおくと, 加法公式が得られる.

4. 関数 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ を

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{d}{dt} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \\ &= (\tilde{y}(t), \tilde{x}(t)) \\ &= (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. また,

$$(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 0)$$

である. よって, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ もあたえられた初期値問題の解である. したがって, 微分方程式の解の一意性より, 題意の等式が得られる.