

§10. 有理関数の積分

多項式の比として表される関数を有理関数という。ここでは有理関数の積分を考えよう。まず、 x の有理関数は部分分数分解により、次の (1)~(3) の形の関数の和として表されることが分かる。

(i) x の多項式.

(ii) $\frac{A}{(x-\alpha)^n}$ ($A, \alpha \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$).

(iii) $\frac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$ ($A, B, \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \beta \neq 0, n \in \mathbf{N}$).

例 10.1 (未定係数法) 有理関数

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^3 + 1}$$

を考えると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^3+1) + (x^3+1) + x^2 + x + 2}{x^3+1} \\ &= x+1 + \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

であり,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

である。ここで,

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

とおくと, 右辺は

$$\frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{x^3+1} = \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a+c}{x^3+1}$$

となり, 分子の係数を比較すると,

$$a+b=1, \quad -a+b+c=1, \quad a+c=2$$

である。これを解くと,

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{4}{3}$$

だから,

$$f(x) = x+1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{x+4}{x^2-x+1}$$

である。このように部分分数分解を求める方法を未定係数法という。

さて、 x の多項式として表される関数の不定積分は定理 9.2 (1) および定理 9.6 (1), (2) を用いて求めることができる。また、(ii) の形で表される関数の不定積分は

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = \begin{cases} A \log|x-\alpha| & (n=1), \\ \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

と求めることができる. 更に, (iii) の形で表される関数の不定積分についてであるが, 原理的には次の定理を用いて計算することができる.

定理 10.1 (iii) の形で表される関数の不定積分について, 次がなりたつ.

(1) 等式

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{A}{2} \log\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\} + \frac{A\alpha + B}{\beta} \tan^{-1} \frac{x - \alpha}{\beta}$$

がなりたつ.

(2) $n = 2, 3, 4, \dots$ のとき,

$$I_n = \int \frac{dx}{\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^n}$$

とおくと, 等式

$$\int \frac{Ax + B}{\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^n} dx = \frac{A}{2(1 - n)\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^{n-1}} + (A\alpha + B)I_n$$

がなりたつ.

(3) (2) の I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)\beta^2} \left[\frac{x - \alpha}{\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\}^{n-1}} + (2n - 3)I_{n-1} \right]$$

をみたとす.

証明 (1) のみ示す.

まず,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int \frac{A(x - \alpha) + A\alpha + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx \\ &= A \int \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx + (A\alpha + B) \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= \frac{A}{2} \log\{(x - \alpha)^2 + \beta^2\} + (A\alpha + B) \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

である. ここで,

$$x - \alpha = \beta \tan t$$

とおくと,

$$dx = \frac{\beta}{\cos^2 t} dt$$

だから, 置換積分法より,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} &= \int \frac{1}{\frac{\beta^2}{\cos^2 t}} \frac{\beta}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} t \\ &= \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \frac{x - \alpha}{\beta} \end{aligned}$$

である. よって, (1) の等式がなりたつ. □

問 10.1 次の問に答えよ.

- (1) 定理 10.1 (1) を右辺を微分することにより示せ.
- (2) 定理 10.1 (2) を左辺を積分することにより示せ.
- (3) 定理 10.1 (3) を示せ.

ここまでに述べたことをまとめると, 次を得る.

定理 10.2 有理関数の不定積分は有理関数, 対数関数, 逆正接関数を用いて表される.

問 10.2 次の問に答えよ.

- (1) 等式

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2}{3} \log|x + 1| + \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

- (2) (1) の等式を例 10.1 で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.3 $a > 0$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) 等式

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a + x}{a - x} \right|$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

- (2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
- (3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.4 次の問に答えよ.

- (1) 等式

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \log|x + 1| - \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

- (2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
- (3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.5 次の問に答えよ.

- (1) 等式

$$\int \frac{dx}{1 - x^3} = -\frac{1}{3} \log|x - 1| + \frac{1}{6} \log(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

- (2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.
- (3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.6 次の問に答えよ.

- (1) 等式

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) \right\}$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.

(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.7 次の問に答えよ.

(1) 等式

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

がなりたつことを右辺を微分することにより示せ.

(2) (1) の等式の左辺の被積分関数の部分分数分解を求めよ.

(3) (1) の等式を (2) で求めた部分分数分解を積分することにより示せ.

問 10.8 $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

とおく. I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{(n-1) \cdot 2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

をみたすことを示せ.

問 10.9 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

とおく.

(1) I_n は漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

をみたすことを示せ.

(2) $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ に対して, k の 2 重階乗 $k!!$ の定義を述べよ.

(3) I_n は 2 重階乗を用いて,

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}), \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

と表されることを示せ.

問 10.10 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

とおく. I_n は漸化式

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

をみたすことを示せ.