

§2. 集合の演算

集合に対して、いろいろな演算を考えることができる。すなわち、幾つかの集合から新たな集合を定めることができる。 A, B を集合とする。このとき、集合 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ を

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

により定め、それぞれ A と B の和、共通部分、差という。 $A \setminus B$ は $A - B$ とも表す。

$A \cap B \neq \emptyset$ のとき、 A と B は交わるという。 A と B が交わらないとき、すなわち、 $A \cap B = \emptyset$ のとき、 A と B は互いに素であるともいう。また、このとき、 $A \cup B$ を A と B の直和という。 $A \cup B$ が A と B の直和であることを $A \sqcup B$ や $A \amalg B$ とも表す。

例 2.1 集合 A, B を

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}$$

により定める。このとき、

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{3\}$$

である。特に、 A と B は交わる。

問 2.1 A を正の偶数全体の集合、 B を正の奇数全体の集合、 C を素数全体の集合とする。このとき、次の (1)~(6) の集合を求めよ。

- (1) $A \cup B$.
- (2) $A \cap B$.
- (3) $A \cap C$.
- (4) $A \setminus B$.
- (5) $B \setminus A$.
- (6) $C \setminus B$.

問 2.2 A を集合とすると、7つの集合

$$A \cup A, \quad A \cup \emptyset, \quad A \cap A, \quad A \cap \emptyset, \quad A \setminus A, \quad A \setminus \emptyset, \quad \emptyset \setminus A$$

は \emptyset か A の何れかに等しい。 \emptyset に等しいものをすべて挙げよ。

和や共通部分について、次がなりたつ。

定理 2.1 A, B を集合とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

- (1) $A, B \subset A \cup B$.
- (2) $A \cap B \subset A, B$.

証明 (1)のみ示す。

$x \in A$ ならば、 $x \in A \cup B$ である。よって、 $A \subset A \cup B$ である。同様に、 $B \subset A \cup B$ である。□

問 2.3 定理 2.1 (2) を示せ。

また、次がなりたつ。

定理 2.2 A, B, C を集合とすると、次の (1), (2) がなりたつ。

- (1) $A, B \subset C$ ならば、 $A \cup B \subset C$.

(2) $C \subset A, B$ ならば, $C \subset A \cap B$.

証明 (1)のみ示す.

$x \in A \cup B$ とする. このとき, $x \in A$ または $x \in B$ である. $x \in A$ のとき, $A \subset C$ より, $x \in C$ である. また, $x \in B$ のとき, $B \subset C$ より, $x \in C$ である. よって, $x \in A$ または $x \in B$ ならば $x \in C$ となるから, $A \cup B \subset C$ である. \square

問 2.4 定理 2.2 (2) を示せ.

注意 2.1 定理 2.1 (1) と定理 2.2 (1) より, $A \cup B$ は A と B を含む集合の中で, 包含関係に関して最小のものであるという言い方をすることができる. また, 定理 2.1 (2) と定理 2.2 (2) より, $A \cap B$ は A と B に含まれる集合の中で, 包含関係に関して最大のものであるという言い方をすることができる.

次がなりたつことはほとんど明らかであろう.

定理 2.3 A, B, C を集合とすると, 次の (1)~(4) がなりたつ.

- (1) $A \cup B = B \cup A$. (和の交換律)
- (2) $A \cap B = B \cap A$. (共通部分の交換律)
- (3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (和の結合律)
- (4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (共通部分の結合律)

注意 2.2 和の結合律より, $(A \cup B) \cup C$ および $A \cup (B \cup C)$ はともに

$$A \cup B \cup C$$

と表しても構わない. 更に, 和の交換律より,

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A$$

である. 共通部分についても同様である.

また, 例 2.1 から分かるように, 差は交換律をみたさない.

問 2.5 集合 A, B, C を

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\}, \quad C = \{3, 4, 5\}$$

により定める. $(A \setminus B) \setminus C$ および $A \setminus (B \setminus C)$ を求めよ. 特に, 差は結合律をみたさないことが分かる.

問 2.6 A, B を集合とし,

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

とおく. $A \ominus B$ を A と B の対称差という. 次の (1)~(3) がなりたつことを示せ.

- (1) $A \ominus A = \emptyset$.
- (2) $A \ominus \emptyset = A$.
- (3) $A \ominus B = B \ominus A$. すなわち, 対称差は交換律をみたす.

更に, 次がなりたつ.

定理 2.4 (分配律) A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

- (1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- (2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

証明 (1)のみ示す.

まず,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

を示す. $x \in (A \cup B) \cap C$ とする. このとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$, すなわち, $x \in A$ または $x \in B$, かつ $x \in C$ である. よって, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$, すなわち,

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

である. したがって,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

である.

次に,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

を示す. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ とする. このとき, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$ である. $x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$ である. よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C$$

である. $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$ である. よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C$$

である. したがって,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

である.

以上より, (1) がなりたつ. □

問 2.7 A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつことを示せ. 特に, 定理 2.4 (2) がなりたつ.

(1) $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(2) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.

定理 2.4 の分配律程度の事実であれば, Venn 図という図を描いて確認することができる.

問 2.8 定理 2.4 の分配律がなりたつことを Venn 図を描いて説明せよ.

差集合に関する基本的性質についても述べておこう.

定理 2.5 A, B, C を集合とする. $A \subset B$ ならば, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $A \setminus C \subset B \setminus C$.

(2) $C \setminus B \subset C \setminus A$.

証明 (1)のみ示す.

$x \in A \setminus C$ とする. このとき, $x \in A$ かつ $x \notin C$ である. ここで, $A \subset B$ より, $x \in B$ である. よって, $x \in B$ かつ $x \notin C$, すなわち, $x \in B \setminus C$ である. したがって, (1) がなりたつ. □

問 2.9 定理 2.5 (2) を示せ.

問 2.10 次の問に答えよ.

(1) 定理 2.5 (1) がなりたつことを Venn 図を描いて説明せよ.

(2) 定理 2.5 (2) がなりたつことを Venn 図を描いて説明せよ.

例 2.2 A, B を集合とする. このとき,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

であることを示そう.

まず, 定理 2.1 (1) より, $A \subset A \cup B$ である. よって, 定理 2.5 (1) より,

$$A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B$$

である.

次に, $x \in (A \cup B) \setminus B$ とする. このとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ である. よって, $x \in A$ かつ $x \notin B$, すなわち, $x \in A \setminus B$ である. したがって,

$$(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B$$

である.

以上より, 始めの等式が示された.

問 2.11 例 2.2 の等式を Venn 図を描いて説明せよ.

問 2.12 A, B を集合とする. 次の問に答えよ.

- (1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ であることを示せ.
- (2) (1) の等式を Venn 図を描いて説明せよ.

最後に, 次の重要な事実を挙げておこう.

定理 2.6 (de Morgan の法則) X, A, B を集合とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, 次のとおり.

- (1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
- (2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

証明 (1) のみ示す.

左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \{x \mid x \in X, x \notin A \cup B\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A \cup B\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x \mid x \in X \setminus A \text{ かつ } x \in X \setminus B\} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

である. よって, (1) がなりたつ. □

問 2.13 定理 2.6 (2) を示せ.

問 2.14 次の問に答えよ.

- (1) 定理 2.6 (1) がなりたつことを Venn 図を描いて説明せよ.
- (2) 定理 2.6 (2) がなりたつことを Venn 図を描いて説明せよ.