§3. 写像

写像は集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である.

定義 3.1 X, Y を空でない集合とし, X の任意の元に対して Y のある元を対応させる規則 f があたえられているとする. このことを

$$f : X \to Y$$

と表し, f を X から Y への写像または X で定義された Y への写像, X を f の定義域または始域, Y を f の値域または終域という. $Y \subset \mathbf{R}, \mathbf{C}$ のときは f をそれぞれ実数値関数, 複素数値関数ともいう. また, 実数値関数, 複素数値関数を単に関数ともいう.

写像 f によって $x \in X$ に対して $y \in Y$ が対応するとき, $y = f(x)$ と表す. このとき, y を f による x の像, x を f による y の原像または逆像という.

注意 3.1 写像によって x に対して y が対応することを $x \mapsto y$ とも表す.

例 3.1 いわゆる 1 変数の微分積分では, 区間で定義された実数値関数を考える. I を区間とすると, I を定義域, $\mathbf{R}$ を値域とする実数値関数 f は $f : I \to \mathbf{R}$ と表すことができる. 例えば, $a \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = a \quad (x \in I)$$

により定めると, f は任意の $x \in I$ に対して a を対応させる定数関数である. また, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を 0 でない定数, $b \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = ax + b \quad (x \in I)$$

により定めると, f は 1 次関数である. 更に, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を 0 でない定数, $b, c \in \mathbf{R}$ を定数とし, $f : I \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in I)$$

により定めると, f は 2 次関数である.

例 3.2 (定値写像) X, Y を空でない集合とし, $y_0 \in Y$ を 1 つ選んで固定しておく. このとき, 写像 $f : X \to Y$ を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める. f を定値写像という. 例 3.1 で述べた定数関数は定値写像の例でもある.

例 3.3 (包含写像, 恒等写像) X, Y を空でない集合とし, $X \subset Y$ とする. このとき, 写像 $\iota : X \to Y$ を

$$\iota(x) = x \quad (x \in X)$$

により定めることができる. ι を包含写像という. 特に, $X = Y$ のときは ι を id_X または 1_X と表し, X 上の恒等写像という.

問 3.1 例 3.3 において, 包含写像, 恒等写像をそれぞれ ι, id_X と表す理由を述べよ.

例 3.4 (制限写像) X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とし, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする. このとき, 写像 $f|_A : A \to Y$ を

$$f|_A(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

により定めることができる. $f|_A$ を f の A への制限という.

f, g を写像とする. f と g の定義域が等しく, f と g の値域も等しく, 更に, f, g の定義域の任意の元 x に対して, $f(x) = g(x)$ がなりたつとき, $f = g$ と表し, f と g は等しいという. また, f と g が等しくないときは $f \neq g$ と表す.

問 3.2 例 3.4 において, $f = f|_A$ となるための必要十分条件で f を用いないものを求めよ.

問 3.3 関数 $f_1, f_2, \ldots, f_6$ をそれぞれ

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_1(x) = x \quad (x \in \mathbf{R}), \quad f_2 : \{0,1\} \to \mathbf{R}, \quad f_2(x) = x \quad (x \in \{0,1\}),$$

$$f_3 : \{0,1\} \to \{0,1\}, \quad f_3(x) = x \quad (x \in \{0,1\}), \quad f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_4(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$f_5 : \{0,1\} \to \mathbf{R}, \quad f_5(x) = x^2 \quad (x \in \{0,1\}), \quad f_6 : \{0,1\} \to \{0,1\}, \quad f_6(x) = x^2 \quad (x \in \{0,1\})$$

により定める.
(1) f_1 と等しい関数をすべて求めよ.
(2) f_2 と等しい関数をすべて求めよ.

写像に対してグラフという集合を対応させることができる. まず, グラフを定義するための準備として, 2 つの集合の直積について述べよう. X, Y を集合とする. このとき, $x \in X$, $y \in Y$ の組 (x, y) 全体からなる集合を $X \times Y$ と表し, X と Y の直積という. すなわち,

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\}$$

である. ただし, 上の組は順序も込みで考えたものであり, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して, $(x, y) = (x', y')$ となるのは $x = x'$ かつ $y = y'$ のときであるとする.

例 3.5 集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ により定めると,

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}, \quad X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

である. $X \times X$ の元 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は異なるものであることに注意しよう. なお, $X \times X$ は X^2 とも表す.

問 3.4 例 3.5 において, $Y \times X$ および Y^2 を外延的記法により表せ.

それでは, 写像のグラフを定義しよう.

定義 3.2 X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする. このとき, $G(f) \subset X \times Y$ を

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$$

により定め, $G(f)$ を f のグラフという.

例 3.6 例 3.1 で述べた, 区間 I で定義された実数値関数 $f : I \to \mathbf{R}$ のグラフは

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$$

である. $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ の直積 $\mathbf{R}^2$ を平面とみなすと, 平面の部分集合であるグラフ $G(f)$ を考えることによって, 関数 f を視覚的に捉えることができる.

問 3.5 集合 X, Y を $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$ により定める. f のグラフを外延的記法により表せ.

写像の定義域や値域の部分集合に対して, それぞれ次のような値域, 定義域の部分集合を考えることができる.

定義 3.3　X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とする．
　$A \subset X$ とする．このとき, $f(A) \subset Y$ を

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

により定め, $f(A)$ を f による A の像という．ただし, $f(\emptyset) = \emptyset$ とする．
　$B \subset Y$ とする．このとき, $f^{-1}(B) \subset X$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

により定め, $f^{-1}(B)$ を f による B の原像または逆像という．ただし, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする．

注意 3.2　定義 3.3 において, $f(X)$ を f の値域ということもある．この場合, Y は終域という方がよい．

例 3.7　問 3.5 と同じ写像 $f : X \to Y$ を考える．このとき,

$$f(\{1\}) = \{4\}, \quad f(\{1,2\}) = \{4,5\}, \quad f^{-1}(\{4\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(\{4,5\}) = X$$

である．

問 3.6　問 3.5, 例 3.7 と同じ写像 $f : X \to Y$ を考える．
(1) $f(\{2\})$, $f(\{3\})$, $f(\{1,3\})$, $f(\{2,3\})$, $f(X)$ を外延的記法により表せ．
(2) $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{6\})$, $f^{-1}(\{4,6\})$, $f^{-1}(\{5,6\})$, $f^{-1}(Y)$ を外延的記法により表せ．

　像および逆像に関して, 次がなりたつ．

定理 3.1　X, Y を空でない集合, $f : X \to Y$ を X から Y への写像とし, $A, A_1, A_2 \subset X$, B, $B_1, B_2 \subset Y$ とする．このとき, 次の (1)〜(10) がなりたつ．
(1) $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(5) $B_1 \subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
(9) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
(10) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

証明　(1), (2), (9) のみ示す．
(1): $y \in f(A_1)$ とする．このとき, 像の定義より, ある $x \in A_1$ が存在し, $y = f(x)$ である．ここで, $x \in A_1$ および仮定 $A_1 \subset A_2$ より, $x \in A_2$ である．よって, 像の定義より, $f(x) \in f(A_2)$, すなわち, $y \in f(A_2)$ である．したがって, $y \in f(A_1)$ ならば $y \in f(A_2)$, すなわち, $f(A_1) \subset f(A_2)$ である．
(2): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
f(A_1 \cup A_2) &= \{y \in Y \mid \text{ある } x \in A_1 \cup A_2 \text{ が存在し}, y = f(x)\} \\
&= \left\{ y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある } x_1 \in A_1 \text{ が存在し } y = f(x_1), \text{ または}, \\ \text{ある } x_2 \in A_2 \text{ が存在し } y = f(x_2) \end{array} \right\} \\
&= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ または } y \in f(A_2)\} \\
&= f(A_1) \cup f(A_2)
\end{aligned}$$

である．よって, (2) がなりたつ．
(9): $x \in A$ とする．このとき, 像の定義より, $f(x) \in f(A)$ である．よって, 逆像の定義より, $x \in f^{-1}(f(A))$ である．したがって, $x \in A$ ならば $x \in f^{-1}(f(A))$, すなわち, $f^{-1}(f(A)) \supset A$ である． □

注意 3.3 「ある○○○が存在し, △△△である」という表現を簡単に

$$^\exists \bigcirc\bigcirc\bigcirc \text{ s.t. } \triangle\triangle\triangle$$

とも表す．「s.t.」は「such that」の略である．例えば, 定理 3.1 (3) の証明は

$$\begin{aligned} f(A_1 \cap A_2) &= \{y \in Y \mid {}^\exists x \in A_1 \cap A_2 \text{ s.t. } y = f(x)\} \\ &\subset \{y \in Y \mid {}^\exists x_1 \in A_1 \text{ s.t. } y = f(x_1), \text{かつ}, {}^\exists x_2 \in A_2 \text{ s.t. } y = f(x_2)\} \\ &= \{y \in Y \mid y \in f(A_1) \text{ かつ } y \in f(A_2)\} \\ &= f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

のように書くことができる．また,「任意の○○○に対して, △△△である」という表現は簡単に

$$^\forall \bigcirc\bigcirc\bigcirc, \triangle\triangle\triangle$$

とも表す．なお,「$^\exists$」や「$^\forall$」はそれぞれ大きく「$\exists$」,「$\forall$」と表すこともある．

問 3.7 記号「$\exists$, $\forall$」はそれぞれ E, A というアルファベットに由来する．これらの記号を用いる理由を述べよ．

問 3.8 次の (1), (2) の文を「$\exists$, $\forall$, s.t. 」といった記号等を用いて表せ．
(1) ある自然数 n が存在し, $f(n) = 0$ となる．
(2) 任意の実数 x に対して, $g(x) \geq 0$ である．

問 3.9 次の問に答えよ．
(1) 定理 3.1 (4) を示せ．
(2) 定理 3.1 (5) を示せ．
(3) 定理 3.1 (6) を示せ．
(4) 定理 3.1 (7) を示せ．
(5) 定理 3.1 (8) を示せ．
(6) 定理 3.1 (10) を示せ．

問 3.10 集合 X, Y を $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$ により定め, 写像 $f : X \to Y$ を $f(1) = 3$, $f(2) = 3$ により定める．次の (1)〜(4) の集合を外延的記法により表せ．
(1) $f(\{1\} \cap \{2\})$ および $f(\{1\}) \cap f(\{2\})$. 特に, 定理 3.1 (3) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる．
(2) $f(\{1\} \setminus \{2\})$ および $f(\{1\}) \setminus f(\{2\})$. 特に, 定理 3.1 (4) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる．
(3) $f^{-1}(f(\{1\}))$. 特に, 定理 3.1 (9) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる．
(4) $f(f^{-1}(\{3, 4\}))$. 特に, 定理 3.1 (10) において, 等号は一般にはなりたたないことが分かる．