§8. 平均値の定理と逆関数の微分

平均値の定理は微分可能な関数の変化の様子を調べる上で基本となるものである. 平均値の定理について述べる前に, 幾つか準備をしておこう.

定義 8.1 $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, $a \in A$ とし, $f : A \to \mathbf{R}$ を関数とする.

任意の $x \in A$ に対して, $f(x) \leq f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における最大値という. また, 任意の $x \in A$ に対して, $f(a) \leq f(x)$ となるとき, $f(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における最小値という.

$a \in I$ となるある開区間 I が存在し, 任意の $x \in A \cap I$ に対して, $f(x) \leq f(a)$ となるとき, $f(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における極大値という. また, 任意の $x \in A \cap I$ に対して, $f(a) \leq f(x)$ となるとき, $f(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における極小値という. 極大値と極小値を合わせて, 単に極値という.

注意 8.1 定義 8.1 の極大値の定義において, I は $I \subset A$ をみたし, $f(a)$ は $f(x) < f(a)$ をみたすものとすることもある. 極小値についても同様である.

閉区間で連続な関数に対しては, 次がなりたつことが分かる.

定理 8.1 閉区間で連続な関数は最大値および最小値をもつ.

定理 8.1 は最大値や最小値をあたえる点の存在は保証してくれるものの, 実際にどこで最大値や最小値をとるかまでは分からない. しかし, 微分可能な関数の極値をあたえる点については, 次がなりたつ.

定理 8.2 $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ を開区間 (a, b) で微分可能な関数とし, $c \in (a, b)$ とする. $f(c)$ が $f(x)$ の $x = c$ における極値ならば, $f'(c) = 0$ である. 特に, $f(c)$ が $f(x)$ の $x = c$ における最大値または最小値ならば, $f'(c) = 0$ である.

証明 $f(c)$ が最大値の場合のみ示す.

最大値の定義より, $h > 0$, $c + h \in (a, b)$ のとき,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

である. また, $h < 0$, $c + h \in (a, b)$ のとき,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

である. よって,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. □

問 8.1 定理 8.2 の意味を関数のグラフを用いて説明せよ.

定理 8.1 と定理 8.2 を用いることにより, 次の Rolle の定理を示すことができる.

定理 8.3 (Rolle の定理) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続であり, 開区間 (a, b) で微分可能な関数とする. $f(a) = f(b)$ ならば, $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

問 8.2 次の問に答えよ.

(1) Rolle の定理の意味を関数のグラフを用いて説明せよ．
(2) Rolle の定理を示せ．

Rolle の定理を用いることにより, 次の平均値の定理を示すことができる．

定理 8.4 (平均値の定理)　$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続であり, 開区間 (a, b) で微分可能な関数とする．このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する．

問 8.3　次の問に答えよ．
(1) 平均値の定理の意味を関数のグラフを用いて説明せよ．
(2) 平均値の定理を示せ．

関数の変化の様子に関する基本的な概念として, 単調増加性や単調減少性を挙げることができる．

定義 8.2　$A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ とし, $f : A \to \mathbf{R}$ を関数とする．$x, y \in A$, $x < y$ ならば, $f(x) < f(y)$ となるとき, f は A で単調増加であるという．また, $x, y \in A$, $x < y$ ならば, $f(x) > f(y)$ となるとき, f は A で単調減少であるという．単調増加関数, 単調減少関数を合わせて, 単に単調関数という．

注意 8.2　定義 8.2 の単調増加性の定義において, 条件を $f(x) \leq f(y)$ とすることもある．また, この場合は f は広い意味で単調増加であるともいう．これに対して, 定義 8.2 の f は狭い意味で単調増加であるともいう．単調減少性についても同様である．

以下では, I を開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかとする．このとき, 平均値の定理を用いることにより, 微分可能な関数の増減に関する次の定理を示すことができる．

定理 8.5　$f : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする．このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつ．
(1) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) = 0$ ならば, f は定数関数である．
(2) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) > 0$ ならば, f は I で単調増加である．
(3) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) < 0$ ならば, f は I で単調減少である．

問 8.4　定理 8.5 を示せ．

$f : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とし, 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) \neq 0$ であると仮定する．このとき, 定理 8.5 (2) または (3) より, $J = f(I)$ とおくと, J は開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何かとなる．更に, f を I から J への写像とみなすと, f の逆関数 $f^{-1} : J \to I$ が存在する．そして, f^{-1} の微分に関して, 次がなりたつことが分かる．

定理 8.6 (逆関数の微分法)　$f : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とし, 任意の $x \in I$ に対して, $f'(x) \neq 0$ であると仮定する．このとき, 任意の $x \in I$ に対して,

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

がなりたつ．

問 8.5　定理 8.6 において, f^{-1} の微分可能性を仮定し, 合成関数の微分法を用いることにより, f^{-1} の導関数を求めよ．

例 8.1　指数関数 e^x は $\mathbf{R}$ で微分可能であり, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= e^x \\
&> 0
\end{aligned}
$$

である. 更に, e^x による $\mathbf{R}$ の像は無限開区間 $(0, +\infty)$ であり, e^x の逆関数は $(0, +\infty)$ で定義された対数関数 $\log y$ である. このとき, 逆関数の微分法より,

$$
\begin{aligned}
(\log y)' &= \frac{1}{(e^x)'} \\
&= \frac{1}{e^x} \\
&= \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

である. よって, y を x に置き換えると,

$$
(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, +\infty))
$$

が得られる.

問 8.6　$f : I \to \mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とし, 任意の $x \in I$ に対して, $f(x) \neq 0$ であると仮定する. このとき, 任意の $x \in I$ に対して,

$$
(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}
$$

がなりたつことを示せ.

問 8.7　関数 $f : I \to \mathbf{R}$ の導関数を求める際に, $y = f(x)$ とおき, 両辺の対数をとった式の導関数を問 8.6 を用いることにより計算する方法がある. これを対数微分法という. 対数微分法を用いることにより, 次の等式を示せ.

(1) $(x^a)' = ax^{a-1}$ $(x > 0)$. ただし, $a \in \mathbf{R}$ は定数である.
(2) $(a^x)' = (\log a)a^x$ $(x \in \mathbf{R})$. ただし, a は $a > 0$, $a \neq 1$ をみたす定数である.
(3) $(x^x)' = x^x(\log x + 1)$ $(x > 0)$.

最後に, 多項式によって定められる関数や三角関数, 指数関数, 対数関数, そして, §7 で述べた双曲線関数と並んで基本的な関数である, 逆三角関数について述べよう.

まず, $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ を $\mathbf{R}$ で定義された正弦関数 $\sin x$ の閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ への制限とする. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ のとき,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x \\
&> 0
\end{aligned}
$$

だから, 定理 8.5 (2) より, f は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単調増加となる. 更に,

$$
f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1
$$

だから, $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ であり, f を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ から $[-1, 1]$ への写像とみなすと, f の逆関数 $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ が存在する. これを $\sin^{-1} y$ と表し, 逆正弦関数という. $\sin^{-1}$ の記号は代わりに Sin^{-1}, $\arcsin$, Arcsin が用いられることもある.

次に, $g : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ を $\mathbf{R}$ で定義された余弦関数 $\cos x$ の閉区間 $[0, \pi]$ への制限とする. $x \in (0, \pi)$ のとき,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \\ &< 0 \end{aligned}$$

だから, 定理 8.5 (3) より, g は $[0, \pi]$ で単調減少となる. 更に,

$$g(0) = 1, \quad g(\pi) = -1$$

だから, $g([0, \pi]) = [-1, 1]$ であり, g を $[0, \pi]$ から $[-1, 1]$ への写像とみなすと, g の逆関数 $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ が存在する. これを $\cos^{-1} y$ と表し, 逆余弦関数という. $\cos^{-1}$ の記号は代わりに Cos^{-1}, arccos, Arccos が用いられることもある.

更に, $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ を例 7.1 で定めた $A \subset \mathbf{R}$ で定義された正接関数 $\tan x$ の開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ への制限とする. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ のとき,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &> 0 \end{aligned}$$

だから, 定理 8.5 (2) より, h は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で単調増加となる. 更に,

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} h(x) = +\infty$$

だから, $h((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbf{R}$ であり, h を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から $\mathbf{R}$ への写像とみなすと, h の逆関数 $h^{-1} : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ が存在する. これを $\tan^{-1} y$ と表し, 逆正接関数という. $\tan^{-1}$ の記号は代わりに Tan^{-1}, arctan, Arctan が用いられることもある.

問 8.8　次の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$.

(2) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$.

(3) $\tan^{-1} 1$.

問 8.9　逆関数の微分法を用いることにより, 次の等式を示せ.

(1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

(2) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

(3) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

問 8.10　$x \in [-1, 1]$ のとき, 等式

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

がなりたつことを示せ.