§9. 不定積分と定積分

実数を変数とする実数値関数に対しては, 微分とは逆の操作を考えることができる. 以下では, 簡単のため I は開区間, 無限開区間, $\mathbf{R}$ の何れかであるとする.

定義 9.1　$f, F : I \to \mathbf{R}$ を関数とする. F が I で微分可能であり, $F' = f$ となるとき,

$$F = \int f(x)\,dx$$

と表し, F を f の原始関数という.

1 つの関数に対する原始関数は一通りには定まらない. 実際, 定理 8.5 (1) を用いることにより, 次を示すことができる.

定理 9.1　$f : I \to \mathbf{R}$ を関数, $F : I \to \mathbf{R}$ を f の 1 つの原始関数とする. このとき, f の任意の原始関数 $G : I \to \mathbf{R}$ は $C \in \mathbf{R}$ を用いて

$$G(x) = F(x) + C \quad (x \in I)$$

と表される.

なお, 定理 9.1 における定数 C を積分定数という.

問 9.1　定理 9.1 を示せ.

§7 および §8 で扱ったことと原始関数の定義より, 次の定理は明らかである. なお, 以下では積分定数は省略することにする. また, 原始関数

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

を

$$\int \frac{dx}{f(x)}$$

とも表す.

定理 9.2　次の (1)〜(11) がなりたつ.

(1) $a \in \mathbf{R}$, $a \neq -1$ とすると, $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$.

(3) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$.

(4) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$.

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$.

(6) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x$.

(7) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x$.

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x.$

(9) $a > 0,\ a \neq 1$ とすると, $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x.$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ または $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x.$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$

原始関数は平面内の図形の面積と深い関係がある．実は, 多変数の実数値関数に対しては, 積分は微分の逆の操作というよりも, 寧ろ図形の面積或いは体積として捉える必要がある．なお, 次の定義では面積の厳密な定義は省略することにする．

定義 9.2 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された関数とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれた図形の面積を x 軸より上の部分は正, 下の部分は負として加えたものが存在するとき, これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と表し, f の $[a, b]$ における定積分という．このとき, f は $[a, b]$ で積分可能であるという．また, f を被積分関数という．

関数の積分可能性については, 次が基本的である．

定理 9.3 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする．このとき, f は $[a, b]$ で積分可能である．

$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする．このとき, 関数 $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a, b])$$

により定めることができる．これを f の不定積分という．不定積分は被積分関数の原始関数であることが分かる．すなわち, 次がなりたつ．

定理 9.4 (微分積分学の基本定理) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とし, F を f の不定積分とする．このとき,

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b])$$

がなりたつ．ただし, $F'(a)$, $F'(b)$ はそれぞれ右微分係数, 左微分係数, すなわち,

$$F'(a) = \lim_{h \to a+0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{h \to b-0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}$$

である．

定理 9.1 と微分積分学の基本定理を用いることにより, 次がなりたつことが分かる．

定理 9.5 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数, F を f の原始関数とする．このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

がなりたつ．

問 9.2　定理 9.5 を示せ.

注意 9.1　定理 9.5 の等式において, 右辺は

$$F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

と表すことが多い. また, 積分の計算をする際には,

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int 1\,dx=\int dx$$

等と表すこともある. 更に, 原始関数と不定積分は定数の差だけしか違いがないため, 区別しないことも多い.

次の定理は不定積分の基本的な性質であるが, 定積分についても同様の事実がなりたつ.

定理 9.6　$f, g : I \to \mathbf{R}$ を原始関数をもつ関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $\displaystyle\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$ (複号同順)

(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx.$

(3) (部分積分法) f, g が微分可能ならば,

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx.$$

(4) (置換積分法) J を I と同様の区間とし, $x : J\to\mathbf{R}$ を $x(J)\subset I$ となる微分可能な関数とすると,

$$\int f(x)\,dx=\int f(x(t))x'(t)\,dt.$$

証明　両辺を直接微分して, 等しくなることを示せばよい. □

問 9.3　$m, n\in\mathbf{N}$ とする. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx.$

例 9.1　$f : I\to\mathbf{R}$ を I で微分可能な関数とする. このとき, $t=f(x)$ とおくと,

$$\frac{dt}{dx}=f'(x)$$

であるが, これを

$$dt=f'(x)\,dx$$

と表し, 置換積分法を用いて,

$$\begin{aligned}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx&=\int\frac{dt}{t}\\&=\log|t|\\&=\log|f(x)|\end{aligned}$$

と計算してよい.

問 9.4　次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \tanh x\,dx$

問 9.5　部分積分法を用いることにより, 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx.$

問 9.6　$a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ とする. このとき, 2 つの不定積分

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx, \quad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

を求めよ.

問 9.7　$a > 0$ とする. $x = at$ とおき, 置換積分法を用いることにより, 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

問 9.8　次の問に答えよ.

(1) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ を閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数とする. このとき, 等式

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

がなりたつことを示せ.

(2) (1) を用いることにより, 定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

の値を求めよ.

(3) (1) を用いることにより, 定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x}\,dx$$

の値を求めよ.