§3. 接ベクトルと写像の微分

$\mathbf{R}^n$ の接ベクトルは $\mathbf{R}^n$ 上の曲線を微分することによって得られるが, 接ベクトルは多様体に対しても考えることができる．ただし, $\mathbf{R}^n$ が 1 つの座標近傍で覆われるのに対して, 一般の多様体はそうとは限らないので, 接ベクトルの定義には少し工夫が必要である．

$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする．$p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく．また, $\varepsilon > 0$ とし,

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を $\gamma(0) = p$ であり, 像が U に含まれるような C^r 級曲線とする．ここで, f を p の近傍で定義された C^r 級関数とし,

$$v_\gamma(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

とおく．f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t = 0$ における方向微分という．また, $v_\gamma(f)$ を f の $t = 0$ における γ 方向の微分係数という．これらは座標近傍には依存しない概念であることに注意しよう．

微分の線形性と積の微分法より, 次がなりたつ．

定理 3.1 M を C^r 級多様体とする．$p \in M$ とし, γ を $\gamma(0) = p$ となる 0 を含む開区間で定義された M 上の C^r 級曲線とする．また, $a, b \in \mathbf{R}$ とし, f, g を p の近傍で定義された C^r 級関数とする．このとき, 次の (1), (2) がなりたつ．
(1) $v_\gamma(af + bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g)$.
(2) $v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g)$.

$v_\gamma(f)$ を局所座標系を用いて表してみよう．φ を U で定義された関数 x_1, x_2, $\dots$, x_n を用いて,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく．このとき,

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

だから, 合成関数の微分法より,

$$v_\gamma(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))(x_i \circ \gamma)'(0)$$

である．

ここで, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, f から $\dfrac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$ への対応を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする．このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i \circ \gamma)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right) f = \sum_{i=1}^{n} (x_i \circ \gamma)'(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

と表すことができる．そこで, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

を p における接ベクトルという．特に，上の v_γ は p の接ベクトルであり，

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{n} (x_i \circ \gamma)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

と表すことができる．また，M 上の曲線を用いなくとも，接ベクトルは方向微分を定める．すなわち，f から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

への対応を定めることができる．

p における接ベクトル全体の集合を T_pM と表す．すなわち，

$$T_pM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \,\middle|\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である．T_pM は自然にベクトル空間となる．T_pM を p における接ベクトル空間または接空間という．このとき，次がなりたつ．

定理 3.2 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$ は 1 次独立である．特に，これらは T_pM の基底となり，T_pM は n 次元ベクトル空間である．

証明 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = 0$$

と仮定する．このとき，f を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$$

である．特に，$j = 1, 2, \ldots, n$ とし，f を $f \circ \varphi^{-1} = x_j$ となるように選んでおくと，f は p の近傍で定義された C^r 級関数であり，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) (\varphi(p)) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

である．よって，

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

である． □

多様体の間の写像に対する微分は接空間の間の線形写像として定めることができる．$(M, \mathcal{S})$ を m 次元 C^r 級多様体とする．また，$\varepsilon > 0$, $p \in M$ とし，

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線とする．このとき，p における接ベクトル v_γ が定まる．$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を γ の像が U に含まれるように選んでおき，

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

と表しておくと,

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{m} (x_i \circ \gamma)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

である.

ここで, $(N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とし, $q = f(p)$ とおく. このとき,

$$f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

は $(f \circ \gamma)(0) = q$ となる C^r 級曲線であるから, q における接ベクトル $v_{f \circ \gamma}$ が定まる.

接空間はベクトル空間であった. v_γ から $v_{f\circ\gamma}$ への対応は T_pM から T_qN への線形写像を定めることを示そう. $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ を $f \circ \gamma$ の像が V に含まれるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \psi \circ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

と表しておくと,

$$\psi \circ (f \circ \gamma) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

である. $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, 合成関数の微分法より,

$$\frac{d(y_j \circ (f \circ \gamma))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (f_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} v_{f\circ\gamma} &= \sum_{j=1}^{n} (y_j \circ (f \circ \gamma))'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i \circ \gamma)'(0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \end{aligned}$$

である. したがって, v_γ から $v_{f\circ\gamma}$ への対応は T_pM から T_qN への線形写像を定める. この対応を $(df)_p$ と表し, f の p における微分という. 特に, $i = 1, 2, \ldots, m$ とすると,

$$(df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q$$

である.

例 3.1 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. M 上の C^r 級関数 f とは M から $\mathbf{R}$ への C^r 級写像のことであった. $p \in M$ とし, f の p における微分を求めよう.

$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく. また, $v \in T_pM$ を

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表しておく. 一方, $\left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)} \right\}$ は $T_{f(p)}\mathbf{R}$ の基底である.

このとき,

$$
\begin{aligned}
(df)_p(v) &= (df)_p\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)\\
&= \sum_{i=1}^n a_i (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)\\
&= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\left(\frac{d}{dt}\right)_{f(p)}\\
&= v(f)\left(\frac{d}{dt}\right)_{f(p)}
\end{aligned}
$$

である. 最後の等式において, 接ベクトル v は関数 f に対して方向微分 $v(f)$ を定めることを思い出そう.

例 3.2 I を 0 を含む開区間, $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. C^r 級曲線

$$\gamma : I \to M$$

とは 1 次元多様体 I から M への C^r 級写像のことであった. γ の 0 における微分 $(d\gamma)_0$ を求めよう.

$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を γ の像が U に含まれるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく. $\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)_0\right\}$ は $T_0 I$ の基底であり, $(d\gamma)_0$ は線形写像であるから, $(d\gamma)_0\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_0\right)$ を計算すれば十分であることに注意しよう. このとき,

$$
\begin{aligned}
(d\gamma)_0\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_0\right) &= \sum_{i=1}^n (x_i \circ \gamma)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(0)}\\
&= v_\gamma
\end{aligned}
$$

である. すなわち, 開区間の標準的な接ベクトルの C^r 級曲線の微分による像はその曲線から定まる接ベクトルとなる.

Euclid 空間の開集合の間の微分可能な写像に対しては連鎖律, すなわち, 合成関数の微分法がなりたつが, この事実は C^r 級多様体の間の C^r 級写像の場合へ一般化することができる.

定理 3.3 (連鎖律) M_1, M_2, M_3 を C^r 級多様体とし, $f \in C^r(M_1, M_2)$, $g \in C^r(M_2, M_3)$ とする. $p \in M_1$ とすると,

$$(d(g \circ f))_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$$

がなりたつ.

連鎖律を用いることにより, 多様体の次元は微分同相写像によって不変な概念であることが分かる. すなわち, 次がなりたつ.

定理 3.4 M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする. M から N への C^r 級微分同相写像が存在するならば, $m = n$ である.