§11. アファイン接続

§10 で述べたユークリッド空間の部分多様体に対する Levi-Civita 接続はアファイン接続というものへ一般化することができる.

定義 11.1 M を C^∞ 級多様体とする. ∇ を $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して, 次の (1)〜(4) がなりたつとき, ∇ を M のアファイン接続という. また, $\nabla_Y X$ を Y に関する X の共変微分という.

(1) $\nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X$.
(2) $\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X$.
(3) $\nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$.
(4) $\nabla_Y (fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X$.

注意 11.1 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. 更に, $p \in M$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とし, $Y_p = Z_p$ であるとする. $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, Y, Z は U 上で

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Z = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表され, $i = 1, 2, \ldots, n$ のとき, $\xi_i(p) = \eta_i(p)$ である.
このとき, 定義 11.1 の条件 (1), (2) より, U 上で

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \nabla_{\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}} X \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X \end{aligned}$$

である. 同様に,

$$\nabla_Z X = \sum_{i=1}^n \eta_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X$$

である. よって, p において, $\nabla_Y X$ と $\nabla_Z X$ の値は一致する. したがって, 各 $p \in M$ において, ∇X は T_pM の線形変換を定める. すなわち, $v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X \in T_pM$ を定めることができる.

多様体のアファイン接続に対して, 捩率というものを定めよう. M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $T(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

により定める. T を捩率テンソル場または捩率という. $T = 0$ となるとき, ∇ は捩れがないなどという.

次に述べるように, T は $(1,2)$ 型のテンソル場となる. $f,g \in C^\infty(M)$ とすると, 定理 5.3 (4) より,

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

である. 特に, $g=1$ とし, 定義 11.1 の条件 (2), (4) を用いると,

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - \{(Yf)X + f\nabla_Y X\} - \{f[X,Y] - (Yf)X\} \\ &= fT(X,Y) \end{aligned}$$

である. 同様に,

$$T(X, fY) = fT(X,Y)$$

である. よって, 注意 11.1 で述べたことと同様に, 各 $p \in M$ において, T は双線形写像

$$T_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$$

を定めることが分かる. したがって, T は $(1,2)$ 型のテンソル場を定める.

また, T は交代的である. すなわち

$$T(X,Y) = -T(Y,X)$$

がなりたつ.

$\mathbf{R}^n$ の部分多様体に対する Levi-Civita 接続の場合と同様に, アファイン接続を局所座標系を用いて表してみよう. $(M,\mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. 更に, $(U,\varphi) \in \mathcal{S}$ とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく. このとき,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

をみたす U 上の C^∞ 級関数 Γ_{ij}^k $(i,j,k=1,2,\ldots,n)$ が存在する. Γ_{ij}^k を Christoffel の記号という. 定義 11.1 の条件 (1)〜(4) より, 共変微分は Christoffel の記号があたえられていれば, 計算することができる. 定理 10.4 と同様に, 次がなりたつ.

定理 11.1 ∇ が捩れのないアファイン接続ならば, 任意の $i,j,k=1,2,\ldots,n$ に対して,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

である.

Riemann 多様体に対しては, 次のようなアファイン接続を考えることが多い.

定義 11.2 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. 任意の $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

がなりたつとき, ∇ は g を保つ, または計量的であるという.

特に, 次がなりたつことが分かる.

定理 11.2 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とする. このとき, g に関して計量的であり, 捩れのない M のアファイン接続が一意的に存在する.

定理 11.2 のアファイン接続を Levi-Civita 接続という.

Levi-Civita 接続の存在は M が $\mathbf{R}^n$ の部分多様体の場合は §10 で示されている. ここでは, §10 の最後に結果のみを述べた, Levi-Civita 接続に対する Christoffel の記号を表す式を計算してみよう.

(M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とし, Levi-Civita 接続 ∇ を考える. (U, φ) を M の座標近傍とし, φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく. このとき, Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ を Christoffel の記号とする.

∇ は計量的だから, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ とすると, Christoffel の記号の定義より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= g\left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \end{aligned}$$

である. よって,

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

とおくと,

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl}$$

である.

(g_{ij}) は正定値実対称行列に値をとり, ∇ は捩れをもたないから, 定理 11.1 より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{li} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \end{aligned}$$

である. 更に, (g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列とし, $m = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) &= 2\sum_{k=1}^n g^{km} \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} \\ &= 2\Gamma_{ij}^m \end{aligned}$$

である. ただし, δ_{lm} は Kronecker の δ である. したがって, m を k, k を l と置き替えると,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{lk}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

である.

最後に, 多様体のアファイン接続に対して, 曲率というものを定めよう. M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $R(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

により定める. R を曲率テンソルまたは曲率という.

次に述べるように, R は $(1,3)$ 型のテンソル場となる. $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$\begin{aligned}
R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]} Z + \nabla_{(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + (Yf)\nabla_X Z \\
&= fR(X,Y)Z
\end{aligned}$$

である. 同様に,

$$R(X,fY)Z = fR(X,Y)Z$$

である. また,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\
&= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Z + f\nabla_X Z) - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z \\
&\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= fR(X,Y)Z
\end{aligned}$$

である. よって, 注意 11.1 で述べたことと同様に, R は $(1,3)$ 型のテンソル場を定める.

また,

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

がなりたつ.

Riemann 計量を保つアファイン接続に関しては, 次がなりたつ.

定理 11.3 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M のアファイン接続, R を ∇ の曲率とする. ∇ が g に関して計量的ならば, 任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$g(R(X,Y)Z, W) + g(Z, R(X,Y)W) = 0$$

である.

証明 括弧積の定義と仮定より,

$$\begin{aligned}
0 &= XYg(Z,W) - YXg(Z,W) - [X,Y]g(Z,W) \\
&= X\left(g(\nabla_Y Z, W) + g(Z, \nabla_Y W)\right) - Y\left(g(\nabla_X Z, W) + g(Z, \nabla_X W)\right) \\
&\quad - g(\nabla_{[X,Y]} Z, W) - g(Z, \nabla_{[X,Y]} W) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X \nabla_Y W) \\
&\quad - g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - g(Z, \nabla_Y \nabla_X W) \\
&\quad - g(\nabla_{[X,Y]} Z, W) - g(Z, \nabla_{[X,Y]} W) \\
&= g(R(X,Y)Z, W) + g(Z, R(X,Y)W)
\end{aligned}$$

である. □